

Grau en Matemàtiques

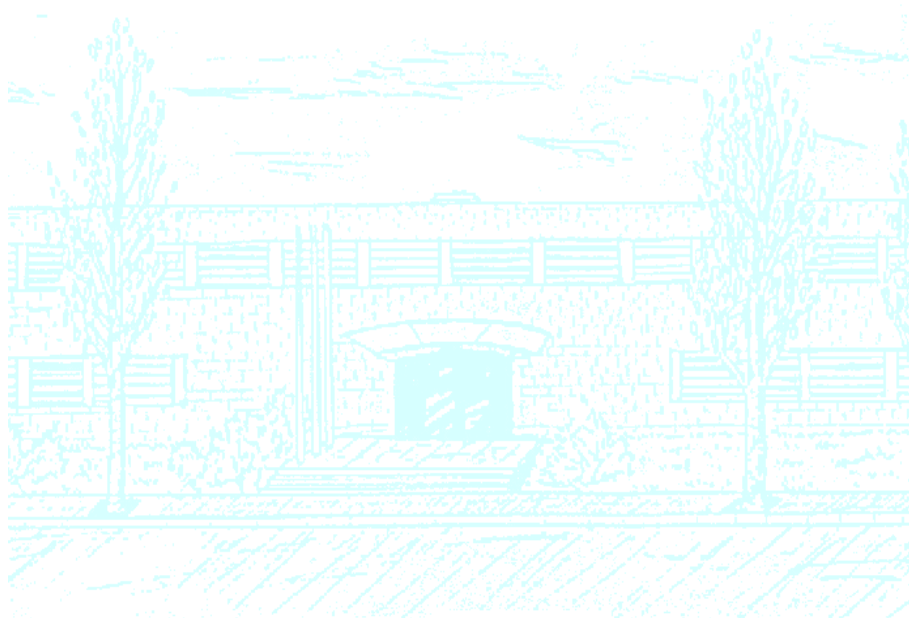
Títol: Geometria i Grups

Autor: Jordi Ferrer Sánchez

Director: Pere Pascual Gainza

Departament: Matemàtica Aplicada I

Convocatòria: Curs 2014-2015



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Facultat de Matemàtiques i Estadística

Índex

Introducció	5
1 Superfícies Euclidianes	7
1.1 Espais mètrics	7
1.2 Superfícies Euclidianes	9
1.3 Isometries del pla	11
1.4 Superfícies quocients	16
1.5 Recobriments del pla	19
1.6 Grup de recobriments isomètrics	21
2 Superfícies El·líptiques	25
2.1 Isometries de l'esfera	26
2.2 Superfícies El·líptiques	28
2.3 L'esfera i els complexos	29
2.4 Geometria el·líptica vs. euclidiana	34
3 Superfícies Hiperbòliques	37
3.1 Isometries del pla hiperbòlic	39
3.2 Línies de \mathbb{H}^2	41
3.3 Simetries en el pla hiperbòlic	43
3.4 Isometries com a funcions complexes	45
3.5 Superfícies Hiperbòliques	47
3.6 Geometria hiperbòlica vs. euclidiana	48
3.7 Construcció de superfícies hiperbòliques a partir de polígons	49
3.8 Construcció de superfícies compactes a partir de polígons	52
3.9 Relació entre polígons i subgrups de moviments	54
Conclusions	57
Bibliografia	59

Introducció

L'impuls de catalogar, mesurar i de classificar-ho tot de la forma més precisa possible ha estat inherent en l'ésser humà des dels seus inicis. Euclides [330 a.C. - 275 a.C.], matemàtic i geòmetra grec conegut com “el pare de la Geometria”, va estudiar el pla i totes les propietats que tenia invariants fos quina fos la forma en que es presentés, formulant així els cinc postulats d'Euclides.

La geometria que va sorgir d'aquests postulats s'anomena encara a dia d'avui geometria euclidiana. Què entenem però per geometria? La idea més senzilla és la d'un espai format per un conjunt de punts relacionats entre ells per una distància. Resulta però, que no només existeix la geometria euclidiana.

Si obviem el cinquè postulat d'Euclides, “Donada una recta i un punt exterior a aquesta, existeix una única recta paral·lela que passa per aquest punt”, apareixen dues geometries més: la geometria el·líptica i la hiperbòlica.

En aquest treball ens centrarem en l'estudi elemental de les superfícies dotades d'aquestes tres geometries, entenent per elemental les eines usades a l'hora de dur a terme aquest estudi. De fet, emprant eines tan avançades com pot ser la geometria diferencial podem classificar una superfície segons la seva curvatura, distingint si aquesta és positiva (el·líptica), negativa (hiperbòlica) o igual a zero (euclidiana). Aquesta classificació és vàlida per a superfícies de dimensió $n \in \mathbb{N}$ (veure [2]) però el nostre estudi recaurà en el cas $n = 2$, restringint-nos a la geometria més elemental que ens sigui possible.

Fruit d'intentar minimitzar la complexitat de les eines usades, sorgirà la necessitat d'emprar altres àmbits de la matemàtica, com serà la teoria de grups, la qual veurem relacionada amb els moviments isomètrics que podem descriure sobre certes superfícies; la variable complexa, per poder facilitar els càlculs i la comprensió del que succeeix en certes ocasions; i el càlcul integral bàsic.

Capítol 1

Superfícies Euclidianes

L'objectiu d'aquest capítol és l'estudi i classificació de les superfícies euclidianes, que són aquelles que localment es poden identificar amb el pla euclidià. Abans, però, introduïrem algunes nocions importants.

1.1 Espais mètrics

1.1.1 Definició. Un espai mètric és una dupla (X, d_X) on X és un conjunt i d_X és una distància. Una distància és una aplicació

$$d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.1.1)$$

tal que compleix les propietats següents:

- i) $d_X(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ i $d_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii) $d_X(x, y) = d_X(y, x) \ \forall x, y \in X$
- iii) $d_X(x, y) \leq d_X(x, z) + d_X(z, y) \ \forall x, y, z \in X$

1.1.2 Exemple. Tots els espais \mathbb{R}^n amb $n \in \mathbb{N}$ i els seus subespais, juntament amb la distància

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

per $x, y \in \mathbb{R}^n$, formen un espai mètric (X, d) .

En topologia es busquen relacions entre espais mètrics a partir d'homeomorfismes, en aquest treball, però, ens interessaran un altre tipus de morfismes: els isomorfismes.

Anem abans a introduir el primer concepte.

1.1.3 Definició. Siguin X i Y dos espais mètrics, una aplicació $f : X \rightarrow Y$ és un homeomorfisme si és bijectiva i bicontínua. Llavors diem que X i Y són espais homeomorfs.

1.1.4 Exemple. Si considerem la funció f que envia els punts de la circumferència unitat al quadrat inscrit a ella de la forma que es mostra en la Figura 1.1, es té que és un homeomorfisme i, per tant, la circumferència i el quadrat són homeomorfs.

1.1.5 Definició. Per a un espai mètric X qualsevol, anomenarem disc de centre p i radi r al conjunt

$$B_r(p) = \{x \in X \mid d_X(p, x) < r\} \quad (1.1.2)$$

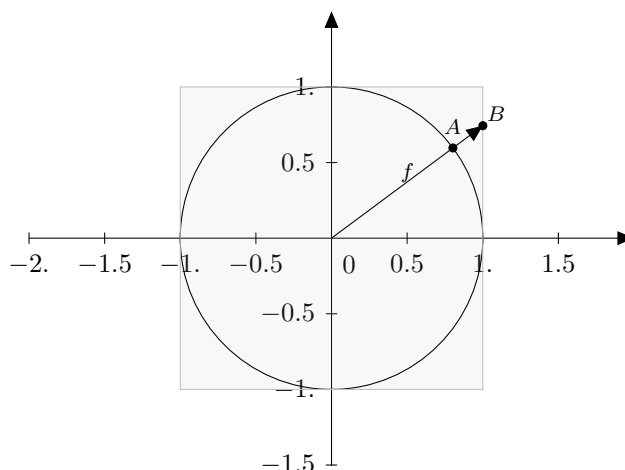


Figura 1.1: Homeomorfisme f entre la circumferència i el quadrat.

1.1.6 Definició. Direm que un espai mètric S és una superfície si per a tot $P \in S$ existeix un entorn U , que conté P , homeomorf a un disc de \mathbb{R}^2 (eq. 1.1.2).

Una de les superfícies més senzilles i, alhora, més importants és el pla euclidià.

1.1.7 Exemple. *El pla euclidià.* L'exemple més bàsic de superfície és el pla euclidià, doncs, evidentment, qualsevol punt $P \in \mathbb{R}^2$ tindrà un entorn homeomorf a un disc de \mathbb{R}^2 : el propi disc.

Recordem que la distància natural del pla és

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} \quad (1.1.3)$$

Nota. Si no s'esmenta el contrari considerarem sempre que el pla euclidià té associada la distància euclidiana, per notació tindrem $d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \|Q - P\|$. O, senzillament, $|PQ|$.

1.1.8 Exemple. *L'esfera.* Si considerem l'esfera com

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

amb la distància induïda per \mathbb{R}^3 , també és una superfície.

Un cop vista la relació entre espais mètrics, induïda pels homeomorfismes, veurem la relació que ens interessarà a nosaltres, generada a partir dels isomorfismes.

1.1.9 Definició. Siguin X i Y dos espais mètrics, una aplicació $f : X \rightarrow Y$ és una isometria si preserva distàncies, és a dir

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in X \quad (1.1.4)$$

Llavors diem que X i Y són espais isomètrics.

Fixem-nos que dos espais mètrics poden ser homeomorfs i que en canvi no siguin isomètrics, tal i com podem veure en l'exemple següent.

1.1.10 Exemple. Si considerem S_1 l'esfera de radi 1, S_2 l'esfera de radi 2 i l'aplicació

$$f : \begin{array}{ccc} S_1 & \rightarrow & S_2 \\ (x, y, z) & \rightarrow & 2(x, y, z) \end{array}$$

es pot veure que S_1 i S_2 són homeomorfs, ja que f és bijectiva i bicontínua, però no són isomètriques, doncs la distància entre dos punts diferents no és la mateixa que hi ha entre les respectives imatges.

1.2 Superfícies Euclidianes

1.2.1 Definició. Direm que una superfície S és localment euclidiana quan per a tot punt $A \in S$ existeixi un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A)$ és isomètric a un disc euclidià, que no és res més que un conjunt com el definit a (eq. 1.1.2) amb S el pla euclidià.

És a dir, sigui $B_r(A) \in S$ i $B_{r'}(A') \in \mathbb{R}^2$, llavors existeix una bijecció φ entre els dos conjunts tal que

$$d_S(B_1, B_2) = d(\varphi(B_1), \varphi(B_2))$$

A continuació es presenten alguns exemples de superfícies que, amb la distància apropiada, són euclidianes.

1.2.2 Exemple. *El cilindre.* El cilindre és una superfície inclosa en \mathbb{R}^3 representada per

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Podem considerar dos distàncies:

- 1) La induïda per \mathbb{R}^3 , que la notarem per d .
- 2) $d_C(P, Q) = \inf\{\text{long}(\alpha) \mid \alpha \text{ és qualsevol camí } C^\infty \text{ inclòs en } C \text{ de } P \text{ a } Q\}$.

Si considerem l'espai mètric (C, d) resulta que el cilindre no és una superfície localment euclidiana, però si en comptes d'aquesta dupla considerem (S, d_C) llavors sí que ho és. Notem que la distància 2 dona com a resultat l'hèlix que passa per P i Q en menys d'una volta al cilindre (Figura 1.2).

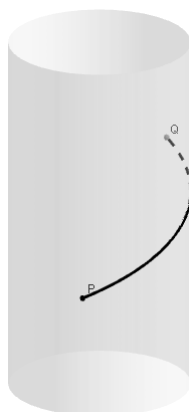


Figura 1.2: Camí de distància mínima de P a Q sobre el cilindre.

El cilindre es pot representar també en \mathbb{R}^2 d'una manera més abstracta de la forma següent: sigui el subconjunt del pla euclidià coordinat

$$C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

identificarem els punts de la forma $(0, y)$ amb $(1, y)$, de manera que la recta $\{x = 0\}$ és la recta $\{x = 1\}$.

Falta ara definir quina distància usarem, per fer-ho replicarem la banda C' al llarg del pla euclidià, és a dir, no només farem la identificació de les rectes esmentades, sinó que considerarem que els punts (x, y) són els mateixos que els de la forma $(x + k, y)$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

La distància serà:

$$d_{C''}(P, Q) = \min\{d(P, \tilde{Q}) \mid \tilde{Q} \text{ és el conjunt de punts identificats amb } Q\} \quad (1.2.1)$$

Si considerem doncs $(C'', d_{C''})$ on C'' és C' aplicant-li aquestes identifications, serà una superfície localment euclidiana. Anem a comprovar-ho.

Si escollim el disc $B_\varepsilon(P)$ amb $\varepsilon < \frac{1}{2}$ tindrem que per a tota parella $P, Q \in D_\varepsilon(P)$ es compleix que $d_{C''}(P, Q) = d(P, Q)$, i per tant serà isomètric a un disc de mateix radi de \mathbb{R}^2 , tal i com es pot observar en la Figura 1.3.

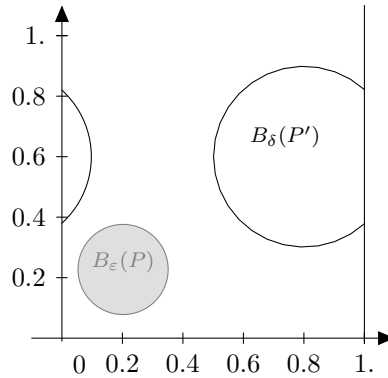


Figura 1.3: Discs de radi $\varepsilon < \frac{1}{2}$ i $\delta > \frac{1}{2}$ sobre el cilindre “abstracte”.

1.2.3 Exemple. El tor. De la mateixa manera que hem vist en l'exemple anterior, es pot representar el tor en \mathbb{R}^2 . Considerem el subconjunt del pla euclidià coordinat

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

i ara, a part de la identificació anterior, també identifiquem els punts de la forma (x, y) amb $(x, y + k)$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

Considerem també la distància definida en (eq. 1.2.1). Així, tenim ara el tor representat en un “tros” del pla euclidià i, per tant, escollint un ε prou petit també serà superfície localment euclidiana.

Cal anar amb cura a l'hora de dir si una superfície és localment euclidiana o no, ja

que si considerem el tor habitual en \mathbb{R}^3 no ho serà. Recordem que el tor en \mathbb{R}^3 compleix l'equació

$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$$

on $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ i R, r són els radis del tor.

Això passa perquè, tot i que les dues representacions són homeomorfes, no són pas isomètriques.

1.3 Isometries del pla

En aquest apartat estudiarem certes aplicacions del pla euclidià tals com les isometries i, més generalment, les aplicacions afins.

1.3.1 Definició. Sigui E l'espai de vectors de \mathbb{R}^2 , una aplicació afí de \mathbb{R}^2 és una funció $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que si definim per qualsevol punt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{f}_P : & E & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & E \\ & \vec{u} & \rightarrow & P + \vec{u} & \rightarrow & f(P + \vec{u}) & \rightarrow & f(P + \vec{u}) - f(P) \end{array}$$

llavors \tilde{f}_P és una aplicació lineal. L'aplicació f es pot expressar de la forma

$$f(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{b} \quad (1.3.1)$$

Observació. Una isometria de \mathbb{R}^2 és una isometria com la definida en (eq. 1.1.4) amb els espais de sortida X i d'arribada Y sent \mathbb{R}^2 .

Recordem a continuació alguns resultats de geometria afí i euclidiana.

1.3.2 Teorema. Una aplicació és afí si, i només si, manté la col·linealitat dels punts i conserva les raons de punts alineats.

Demostració. Fixem-nos primer que f manté la col·linealitat dels punts i conserva les raons de punts alineats independentment de \vec{b} , ja que una translació no alterarà els resultats. Suposem, doncs, que $\vec{b} = 0$ i per tant es té que $f(\vec{x}) = M\vec{x}$.

Siguin ara A, B i C tres punts alineats, definim $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Per ser punts alineats tenim que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Es té ara que

$$f(\overrightarrow{AB}) = f(\vec{u}) = M\vec{u}$$

$$f(\overrightarrow{AC}) = f(\vec{v}) = M\vec{v} = M\lambda\vec{u} = \lambda M\vec{u}$$

Per tant, f manté la col·linealitat i conserva les raons de punts alineats. \square

1.3.3 Proposició. Una isometria és una aplicació afí.

Demostració. Una isometria conserva distàncies, en concret, conserva les distàncies entre tres punts alineats, el que implica que conserva la col·linealitat dels punts i les raons entre punts alineats. Per tant, és una funció afí. \square

Observació. Podem expressar les isometries de la forma (eq. 1.3.1), per tant podem classificar-les tal i com ho faríem amb una aplicació afi.

1.3.4 Teorema. Si f és una isometria, que l'expressarem com $f(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{b}$, llavors M és una matriu ortogonal.

Demostració. Com que f és una isometria de \mathbb{R}^2 , M serà una matriu 2×2

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Observem primer que \tilde{f} té la mateixa matriu i que conserva normes (conserva distàncies), cosa que implica que conserva el producte escalar i, per tant:

$$u^t v = \langle u, v \rangle = \langle \tilde{f}(u), \tilde{f}(v) \rangle = \tilde{f}(u)^t \tilde{f}(v) = u^t M^t M v$$

Així doncs $M^t M = Id$ i tindrem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Els coeficients de la matriu M compleixen doncs

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & (1) \\ c^2 + d^2 = 1 & (2) \\ ac + bd = 0 & (3) \end{cases}$$

A partir de les igualtats (1) i (2) i per la identitat trigonomètrica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, podem afirmar que existeixen θ i $\phi \in \mathbb{R}$ tals que

$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \\ c = \cos\phi \\ d = \sin\phi \end{cases}$$

A més, per (3), tenim $\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = 0 \Rightarrow \cos(\phi - \theta) = 0 \Rightarrow \phi - \theta = \pm\frac{\pi}{2}$
I per tant

$$\begin{cases} c = \cos\phi = \cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin\theta \\ d = \sin\phi = \sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos\theta \end{cases}$$

Per tant la matriu M serà de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Com que les dues matrius són ortogonals, concloem que M és ortogonal. \square

Observació. Com que M és una matriu ortogonal es tindrà que $\det(M) = \pm 1$.

1.3.5 Proposició. Podem distingir entre quatre tipus d'isometries:

1) Translació: Una translació de vector \vec{x} envia el punt P al punt $P + \vec{x}$. Ho notarem per $T_{\vec{x}}$ i tindrà expressió

$$T_{\vec{x}}(\vec{P}) = Id \cdot \vec{P} + \vec{x} = \vec{P} + \vec{x}$$

on \vec{P} és el vector que indica la posició del punt P respecte a l'origen.

Observem que tindrem $\det(M) = \det(Id) = 1$.

2) Rotació: Una rotació d'angle θ i punt fix O envia el punt P al resultant de rotar el pla euclidià respecte al punt O amb angle θ , ho notarem per $R_{O,\theta}$. Si el punt fix és l'origen, usarem la notació R_{θ} i tindrà expressió

$$R_{\theta}(\vec{P}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$

Aquesta suposició per facilitar l'expressió no provoca pèrdua de generalitat ja que, si volem un altre punt fix de rotació el podem obtenir composant aquesta última amb translacions. En concret tenim $R_{P,\theta} = T_{\vec{P}} R_{\theta} T_{-\vec{P}}$.

Observem que també tindrem $\det(M) = 1$.

3) Simetria: Una simetria respecte a la recta l amb pendent α envia el punt P al resultant d'invertir tots els punts del pla euclidià respecte a la recta l . Ho notarem per S_l i, si passa per l'origen, tindrà expressió

$$S_l(\vec{P}) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$

Si la recta l no passa per l'origen caldrà que la translació \vec{b} sigui la necessària per a que la simetria coincideixi amb $T_{\vec{x}} S_l T_{-\vec{x}}$, on \vec{x} envia la recta amb pendent α que passa per l'origen a la recta l .

Observem que ara tindrem $\det(M) = -1$.

4) Simetria amb lliscament: Una simetria respecte a la recta l seguida d'una translació amb direcció diferent al perpendicular de la recta l té la mateixa matriu que una simetria.

Farem aquesta distinció entre simetries, ja que més endavant ens serà útil. Notarem aquestes darreres de la forma $S_{l,\vec{x}}$, on \vec{x} serà la translació que s'aplicarà després de reflectir respecte a la recta l .

Observem que, evidentment, també tindrem $\det(M) = -1$.

Observació. Fixem-nos en que, amb la base adequada, si la matriu M diagonalitza ho farà com

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3.6 Definició. Direm que una isometria preserva orientació quan el determinant de la matriu M sigui 1 i direm que no preserva orientació quan sigui -1.

1.3.7 Exemple. *Translació.* Podem considerar, per exemple, la translació $T_{(1,0)}$. Que envia tot punt $P = (P_1, P_2)$ a $T_{(1,0)}(P) = (P_1 + 1, P_2)$.

1.3.8 Exemple. *Rotació.* Si considerem la rotació $R_{\frac{\pi}{4}}$, veiem com actuarà en la Figura 1.4 on envia P al resultat de rotar el pla respecte l'origen amb angle $\frac{\pi}{4}$.

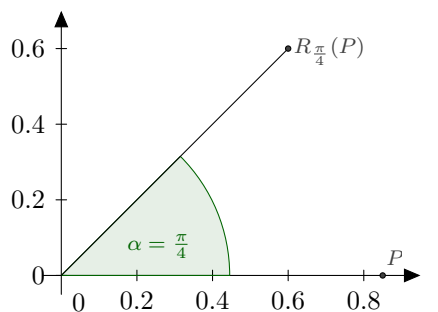


Figura 1.4: Rotació d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1.3.9 Exemple. *Simetria.* Si ara es considera la simetria respecte de la recta $l = \{y = 0\}$, S_l , podem veure en la Figura 1.5 com actuarà en els punts P i Q .

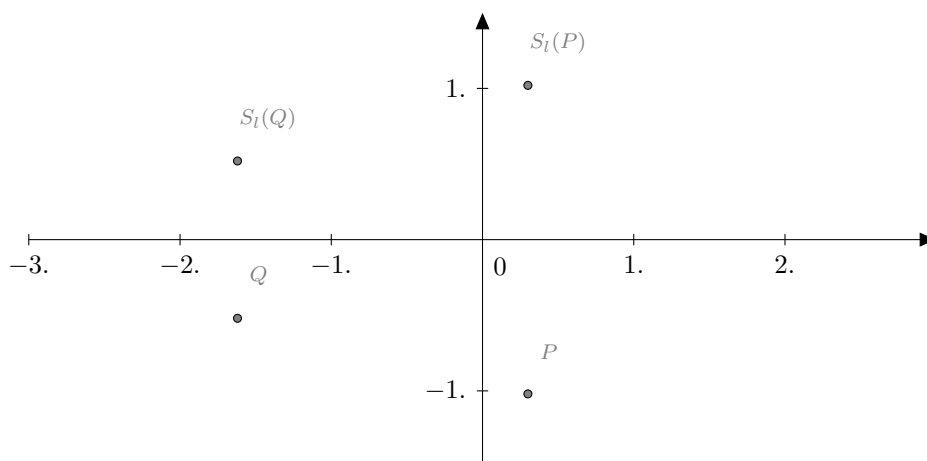


Figura 1.5: Simetria respecte a la recta $\{y = 0\}$.

Observació. La composició de dues isometries de \mathbb{R}^2 també és una isometria de \mathbb{R}^2 .

Demostració. Siguin φ i ψ dues isometries, tenim que

$$d(P, Q) = d(\psi(P), \psi(Q)) = d(\varphi(\psi(P)), \varphi(\psi(Q))) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$$

I, per tant, la composició $\varphi\psi$ també és isometria. □

1.3.10 Corol·lari. Les isometries de \mathbb{R}^2 formen un grup, que notarem com $Isom(\mathbb{R}^2)$.

1.3.11 Teorema. Qualsevol translació o rotació és la composició de dues simetries. Recíprocament, la composició de dues simetries és una translació o rotació.

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, considerem els eixos coordenats de forma que l'eix y sigui paral·lel a la direcció de la translació $T_{\vec{x}}$, de manera que $\vec{x} = (0, a)$. Llavors, sigui $P = (p_1, p_2)$, es té

$$\begin{aligned} T_{(0,a)}(p_1, p_2) &= T_{(0, \frac{a}{2})}(p_1, p_2 + \frac{a}{2}) = \\ &= T_{(0, \frac{a}{2})}S_{\{y=0\}}(p_1, -p_2 - \frac{a}{2}) = \\ &= T_{(0, \frac{a}{2})}S_{\{y=0\}}T_{(0, -\frac{a}{2})}(p_1, -p_2) = \\ &= T_{(0, \frac{a}{2})}S_{\{y=0\}}T_{(0, -\frac{a}{2})}S_{\{y=0\}}(p_1, p_2) = \\ &= S_{\{y=\frac{a}{2}\}}S_{\{y=0\}}(p_1, p_2) \end{aligned}$$

Així doncs, $T_{(0,a)} = S_{\{y=\frac{a}{2}\}}S_{\{y=0\}}$, que és la composició de dues simetries.

Considerem ara, també sense pèrdua de generalitat, que la rotació té com a punt fix l'origen O i, per tant, tenim R_θ .

Observem que

$$R_\theta(p_1, p_2) = (p_1 \cos \theta - p_2 \sin \theta, p_1 \sin \theta + p_2 \cos \theta)$$

És fàcil comprovar que

$$R_\theta = R_{O, \frac{\theta}{2}}S_{\{y=0\}}R_{O, -\frac{\theta}{2}}S_{\{y=0\}}$$

On $R_{O, \frac{\theta}{2}}S_{\{y=0\}}R_{O, -\frac{\theta}{2}}$ és la simetria respecte la bisectriu dels vectors \vec{OP} i $\vec{OR}_\theta(P)$.

Siguin S_L i S_M dues simetries respecte a les rectes L i M respectivament. Considerarem, sense pèrdua de generalitat, que $L = \{y = 0\}$. Si les dues rectes són paral·leles el resultat de compondre les dues simetries serà una translació $T_{(0,a)}$ on $\frac{a}{2}$ és la distància que les separa, força evident si mirem la primera part de la demostració.

Si, per contra, les rectes es tallen en un punt, suposem que en O , el resultat de compondre les dues simetries serà una rotació d'angle ϕ , on $\phi/2$ és l'angle que formen L i M , cosa que també es veu fàcilment a la primera part de la demostració. \square

1.3.12 Corol·lari. Tota isometria es pot generar a partir de, com a màxim, tres simetries.

1.3.13 Lema. Qualsevol isometria del pla està determinada per les imatges de tres punts no alineats.

Demostració. Siguin A , B i C tres punts de pla no alineats, tot punt P queda determinat per les distàncies $d_A = d(A, P)$, $d_B = d(B, P)$ i $d_C = d(C, P)$ respecte als tres punts i, en efecte, $f(P)$ també quedarà determinat per aquestes mateixes distàncies d_A , d_B i d_C respecte les imatges $f(A)$, $f(B)$ i $f(C)$ respectivament.

Al ser punts no alineats i f isometria, les imatges també seran punts no alineats i, per tant, juntament amb les distàncies, només quedarà determinada una possible localització per $f(P)$. \square

Observació. De fet, això passa per ser aplicació afí, doncs amb la imatge de dos vectors linealment independents ja n'hi ha prou per determinar-la.

1.4 Superfícies quocients

1.4.1 Definició. Direm que una relació \simeq sobre un conjunt X no buit és d'equivalència si satisfà les propietats següents:

- (i) $x \simeq x \quad \forall x \in X$
- (ii) Si $x \simeq y$ llavors $y \simeq x \quad \forall x, y \in X$
- (iii) Si $x \simeq y$ i $y \simeq z$ llavors $x \simeq z \quad \forall x, y, z \in X$

Notarem el conjunt de punts relacionats amb x com $[x]$, que anomenarem classe d'equivalència de x .

A partir d'aquesta definició podem introduir el concepte d'espai quocient.

1.4.2 Definició. Definirem l'espai quocient a partir de l'espai X i de la relació d'equivalència \simeq com l'espai que té per punts les classes d'equivalència donades per \simeq , i ho notarem com X/\simeq .

1.4.3 Proposició. Sigui $\Gamma \subseteq Isom(\mathbb{R}^2)$ un subgrup. La relació següent és d'equivalència:

$$P \simeq Q \Leftrightarrow \exists \varphi \in \Gamma \text{ tal que } Q = \varphi(P)$$

Així, $\mathbb{R}^2/\Gamma := \mathbb{R}^2/\simeq$ és un espai quocient.

Demostració. Només cal veure que la relació és efectivament d'equivalència, força directe per ser Γ subgrup.

- (i) Per ser Γ subgrup de $Isom(\mathbb{R}^2)$ es té que $Id \in \Gamma$.
- (ii) Si $P \simeq Q$, $\exists \varphi \in \Gamma$ tal que $Q = \varphi(P)$, per ser Γ subgrup $\varphi^{-1} \in \Gamma$ i, per tant, $Q \simeq P$.
- (iii) Si $P \simeq Q$ i $Q \simeq R$ llavors $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$ tals que $Q = \varphi_1(P)$ i $R = \varphi_2(Q)$. Llavors $\varphi_2\varphi_1 \in \Gamma$ per ser subgrup, $R = \varphi_2\varphi_1(P)$ i, per tant, $P \simeq R$. \square

1.4.4 Definició. La distància entre dues classes $[x]$ i $[y]$ serà la mínima entre tots els possibles parells (x, y) amb $x \in [x]$ i $y \in [y]$. La topologia generada en els espais quocients la anomenarem topologia quocient, induïda per la relació d'equivalència.

Hi hauran casos en que podrem assegurar que \mathbb{R}^2/Γ és una superfície localment euclidiana. Cal, però, que el subgrup Γ compleixi algunes propietats.

Veiem primer que pot donar-se el cas que l'espai quocient definit no sigui ni superfície.

1.4.5 Exemple. Considerem l'espai quocient definit a través del subgrup

$$\Gamma = \{\text{Rotacions de centre l'origen}\}$$

Això ens defineix la relació d'equivalència

$$P \simeq Q \Leftrightarrow \exists \varphi \in \Gamma \text{ rotació tal que } Q = \varphi(P) \Leftrightarrow \|P\| = \|Q\|$$

Per tant tots els punts d'una mateixa circumferència queden identificats. Així, si anomenem S_r a la circumferència de radi r centrada en el zero,

$$\mathbb{R}^2/\Gamma = \{S_r \mid r \geq 0\} \cong \{r \mid r \geq 0\} = [0, \infty)$$

Que, tal com havíem avançat, no és superfície.

1.4.6 Definició. Definirem l'òrbita respecte el punt P d'un grup Γ com

$$\Gamma(P) = \{Q \mid Q = \varphi(P) \text{ per algun } \varphi \in \Gamma\}$$

1.4.7 Definició. Direm que Γ és discontinu si tota òrbita no té punts d'acumulació. És a dir, per P fixat,

$$\forall Q \in \Gamma(P), \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } (B_\varepsilon(Q) \setminus Q) \cap \Gamma(P) = \emptyset.$$

1.4.8 Definició. Direm que Γ no té punts fixos si

$$\forall \varphi \in \Gamma \text{ amb } \varphi \neq id \text{ es té que } \varphi(P) \neq P \forall P.$$

Els grups Γ que ens interessaran seran els que compleixin aquestes dues propietats essentades.

Observació. Un grup Γ discontinu i sense punts fixos només conté translacions i simetries amb lliscament.

Demostració. De fet amb que Γ fos només sense punts fixos ja n'hi hauria prou per que ho complís, doncs tant les rotacions com les simetries sense lliscament tenen punts fixos. \square

Veiem ara que els espais quocients generats per grups sense una d'aquestes propietats no són pas superfícies. Per exemple, que continguin punts fixos.

1.4.9 Exemple. Sigui $\Gamma = \{Id, R_{\frac{\pi}{2}}, R_\pi, R_{\frac{3\pi}{2}}\}$, on resulta evident que l'origen és un punt fix de Γ . Considerem l'espai $S = \mathbb{R}^2 / \Gamma$ i el disc $B_\varepsilon(O')$ on O' és el punt imatge de l'origen, per qualsevol de les quatre isometries, que és el propi origen en S .

Resultarà que per cap $\varepsilon > 0$ es té que $B_\varepsilon(O')$ és isomètric a un disc de \mathbb{R}^2 , doncs el disc de \mathbb{R}^2 que dona lloc a $B_\varepsilon(O')$ sempre tindrà punts que s'identifiquen amb altres punts del propi disc.

La propietat de discontinuïtat també serà necessària en els grups Γ , tal i com ens il·lustren els dos exemples següents.

1.4.10 Exemple. Sigui $\Gamma = \{T_{\vec{x}} \mid \vec{x} = (\lambda, 0) \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}\}$, considerem $S = \mathbb{R}^2 / \Gamma$. No serà ni superfície, ja que $(P_1, P_2) = P \simeq Q = (Q_1, Q_2) \Leftrightarrow P_2 = Q_2$. Per tant $S \cong \mathbb{R}$ i cap entorn de qualsevol punt serà homeomorf a un disc de \mathbb{R}^2 .

Cal observar que aquest grup Γ no és discontinu ja que qualsevol punt P és d'acumulació: $\forall \varepsilon > 0 \exists Q \neq P$ que és dins de $B_\varepsilon(P)$ amb $Q \simeq P$.

1.4.11 Exemple. Sigui ara $S = \mathbb{R}^2 / \Gamma$ generada per $\Gamma = \{T_{\vec{x}} \mid \vec{x} = (\lambda, 0) \text{ amb } \lambda \in \mathbb{Z}\}$. Ara S sí serà superfície, de fet serà superfície localment euclidiana ja que és un cilindre tal i com es representava en (1.2.2) a partir d'identificacions de rectes.

Observació. Hi ha autors [4] que exigeixen que el grup Γ sigui uniformement discontinu en comptes de discontinu i sense punts fixos. Un grup es diu que és uniformement discontinu si

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall Q \in \Gamma(P) \text{ es té que } (B_\delta(Q) \setminus Q) \cap \Gamma(P) = \emptyset$$

Una definició molt semblant a la de grup discontinu i que només es diferencia en el fet que la constant δ serveix per a qualsevol punt, mentre que en (1.4.7) la constant ε és per a cada punt donat.

En aquest treball, però, exigirem només que Γ sigui discontinu i sense punts fixos.

1.4.12 Proposició. Si un grup de moviments del pla Γ és discontinu i sense punts fixos, llavors $S = \mathbb{R}^2/\Gamma$ és superfície localment euclidiana.

Demostració. Considerem un punt $P \in \mathbb{R}^2$. Per ser Γ discontinu existirà un $\varepsilon > 0$ tal que $(B_\varepsilon(Q) \setminus Q) \cap \Gamma(P) = \emptyset$, és a dir, que tot punt de la òrbita $\Gamma(P)$ està a distància euclidiana major o igual que ε del punt P . Per tant, per ser Γ sense punts fixos, $\varphi(P)$ estarà a distància major o igual que ε de P per tota $\varphi \neq id$.

Si considerem ara la bola $B_\delta(P)$, amb $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, aquesta serà disjunta de qualsevol bola de la forma $\varphi(B_\delta(P))$ amb $\varphi \in \Gamma$ diferent de la identitat. Del que es dedueix que $B_\delta(P)$ no pot contenir dos punts diferents que siguin de la mateixa òrbita.

Així doncs, $B_\delta(P)$ és isomorf a un disc del pla i, per tant, $S = \mathbb{R}^2/\Gamma$ serà una superfície euclidiana. \square

1.4.13 Teorema. Un grup Γ discontinu i sense punts fixos està generat per un o dos elements.

Demostració. Assumirem primer que Γ només conté translacions. Sigui P un punt del pla qualsevol, per ser Γ discontinu tot punt de $\Gamma(P)$ estarà a una distància major o igual que un cert $\varepsilon > 0$. Escollim $T_{\vec{x}_1}$ com la translació que envia P al punt més proper de $\Gamma(P)$ (si hi ha més d'un escollir qualsevol d'ells).

Per definició, totes les potències $T_{\vec{x}_1}^n$ amb $n \in \mathbb{Z}$ estaran dins de Γ . De fet, tota translació T amb la mateixa direcció que $T_{\vec{x}_1}$ serà de la forma $T_{\vec{x}_1}^n$. Si no fos així podríem escollir el n tal que $T_{\vec{x}_1}^n(P)$ estigues el més proper possible a $T(P)$ i llavors la translació $T^{-1}T_{\vec{x}_1}^n$ seria més curta que $T_{\vec{x}_1}$, cosa que contradiu l'elecció de $T_{\vec{x}_1}$.

Per tant, si $\{\dots, T_{\vec{x}_1}^{-1}, id, T_{\vec{x}_1}, T_{\vec{x}_1}^2, \dots\}$ no exhausteix Γ , llavors aquest conté alguna translació més amb direcció diferent. En tal cas, escollim una altra vegada una translació $T_{\vec{x}_2}$ de longitud mínima i direcció diferent. Si considerem ara totes les possibles combinacions $T_{\vec{x}_1}^n T_{\vec{x}_2}^m$ aplicades al punt P obtenim un "tessel·lat" de \mathbb{R}^2 . Veiem que aquesta serà exactament l'òrbita de P .

La demostració és igual que la feta per $T_{\vec{x}_1}$. Suposem que existeix una translació qualsevol \tilde{T} que no és de la forma $T_{\vec{x}_1}^n T_{\vec{x}_2}^m$, escollim doncs n i m tals que $T_{\vec{x}_1}^n T_{\vec{x}_2}^m(P)$ estigui el més proper possible a $\tilde{T}(P)$ i considerem la translació $\tilde{T}^{-1}T_{\vec{x}_1}^n T_{\vec{x}_2}^m$. Aquesta serà més curta que $T_{\vec{x}_1}$ o $T_{\vec{x}_2}$, que contradiu l'elecció de les dues translacions.

Així, doncs, si Γ només conté translacions estarà format per dos elements o menys.

Suposem ara que Γ també conté simetries amb lliscament.

Sigui $S_{(l, \vec{x})} \in \Gamma$, si totes les combinacions de la simetria amb lliscament exhausteix Γ ja hem acabat. Si no és així, suposem que Γ conté una altra simetria amb lliscament diferent $S_{(l', \vec{x}')} i que, per tant, $S_{(l, \vec{x})} S_{(l', \vec{x}')} \in \Gamma$.$

$$S_{(l, \vec{x})} S_{(l', \vec{x}')} = T_{\vec{x}} S_l T_{\vec{x}'} S_{l'} = T_{\vec{x}} T_{\vec{x}'} S_l S_{l'} = T_{\vec{y}} S_l S_{l'}$$

Pel teorema 1.3.11 tenim que $S_l S_{l'}$ serà o una rotació o una translació, però Γ no pot contenir rotacions, per tant $S_l S_{l'} = T_{\vec{y}}$. Això implica que les rectes l i l' són paral·leles i que, en comptes d'agafar $S_{(l, \vec{x})}$ i $S_{(l', \vec{x})}$ com a generadors de Γ podem agafar $S_{(l, \vec{x})}$ i $T_{\vec{y}}$. Això implica que Γ ja està totalment generat, doncs evidentment una simetria addicional no seria possible i, pel mateix argument que hem fet al principi de la demostració, tampoc ho és una translació. \square

1.4.14 Corol·lari. $S = \mathbb{R}^2/\Gamma$ és un cilindre, una cinta de Möbius, un tor, una ampolla de Klein o el propi pla per a Γ discontinu i sense punts fixos.

Demostració. Pel teorema anterior, tenim que Γ té cinc possibles combinacions de generadors, que els classifiquem de la següent forma.

Generadors de Γ	Superfície
Una translació	Cilindre
Una simetria amb lliscament	Cinta de Möbius
Dos translacions	Tor
Una translació i una simetria amb lliscament	Ampolla de Klein
La identitat	Pla euclidià

\square

1.5 Recobriments del pla

En la secció anterior hem demostrat que, sota certes condicions, \mathbb{R}^2/Γ és una superfície localment euclidiana. En aquesta secció i la següent es pretén demostrar el recíproc: que tota superfície localment euclidiana és de la forma \mathbb{R}^2/Γ . Per poder fer la demostració inversa haurem d'imposar algunes propietats a la nostra superfície S que sempre compleixen les superfícies quocients, però que no tenen per què fer-ho les superfícies localment euclidianes en general.

Les propietats que li exigirem a S són la connexió i la completesa, recordem quina era la seva definició.

1.5.1 Definició. Direm que una superfície S és connexa quan per tota parella de punts P i Q dins la superfície existeix un camí de P a Q continu, inclòs totalment en S .

Observació. Cal esmentar que aquesta definició és la de superfície arc-connexa. Nosaltres usarem aquesta ja que ens serà més útil i, en el cas de les superfícies, és equivalent a la de connexa, doncs tota superfície és localment arc-connexa.

1.5.2 Definició. Entendrem com a segment d'una superfície localment euclidiana una corba $\alpha : I \rightarrow S$ tal que, si considerem la isometria local $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow U$, amb U obert de S tal que $\alpha(I) \in U$, es té que $\varphi^{-1}(\alpha(I))$ és un segment de \mathbb{R}^2 . La longitud del segment en S serà la mateixa que la del segment en \mathbb{R}^2 , doncs φ és isometria.

L'angle entre dos segments de S serà el mateix que el que formen les antiimatges dels segments en \mathbb{R}^2 .

Hi ha diverses definicions de completesa equivalents, la que a nosaltres ens servirà és la següent.

1.5.3 Definició. Es diu que una superfície S és completa si tot segment $\alpha : I \rightarrow S$ es pot estendre de forma contínua indefinidament. És a dir, que existeix $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow S$ tal que $\tilde{\alpha}|_I = \alpha$.

Per estendre un segment d'una superfície simplement l'enganxem a un altre segment de manera que formin angle π .

Aquestes dues propietats són necessàries per poder definir un recobriment d'una superfície.

1.5.4 Definició. Un recobriment d'una superfície localment euclidiana S connexa i completa pel pla euclidià és una funció $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ contínua i exhaustiva que és una isometria local. Això vol dir que tot punt $P \in \mathbb{R}^2$ té un entorn $B_\varepsilon(P)$ en el qual, per qualsevol parella $Q, R \in B_\varepsilon(P)$, es compleix

$$d(Q, R) = d_S(f(Q), f(R))$$

Anem a demostrar que, efectivament, \mathbb{R}^2 pot recobrir una superfície com l'esmentada. Per fer-ho considerarem el recobriment donat per la funció pinzell p .

1.5.5 Definició. Definirem la funció pinzell de la següent manera:

Determinarem els punts del pla a partir del raig que va de l'origen O al punt P en qüestió i de la distància $d(O, P)$. Evidentment amb aquestes dos coses tot punt queda inequívocament determinat.

Fixem un punt $O_S \in S$ i considerem la isometria $p : B_\varepsilon(O) \rightarrow B_\varepsilon(O_S)$, que serà possible per un $\varepsilon > 0$ prou petit, doncs S és localment euclidiana. Ara, la funció pinzell serà simplement l'extensió d'aquesta isometria a través dels rajos esmentats, de forma que $p(P)$ es troba estenent el segment que té com a origen O_S i que és imatge de $OP \cap B_\varepsilon(O)$ una distància $d(O, P)$.

$$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \tag{1.5.1}$$

L'extensió del segment és possible gràcies a la hipòtesis de què la superfície és completa, per tant ara tenim ja la nostra funció pinzell ben definida.

1.5.6 Teorema. La funció pinzell p té les següents propietats:

- (i) Tot punt $P \in \mathbb{R}^2$ té un entorn on p és una isometria (és recobriment).
- (ii) p és exhaustiva.

Demostració. (i) Suposem el contrari, que algun punt no té cap entorn en el que p és una isometria, fixem un d'aquests punts P . Si considerem G el conjunt de tots aquests punts, és directe veure que serà tancat, doncs el complementari és trivialment obert. Si ara considerem el conjunt $G \cap OP$, serà tancat i no buit i, per Heine-Borel, existirà un punt A del conjunt tal que $d(O, A) = \min_{B \in G \cap OP} d(O, B)$.

Sense pèrdua de generalitat podem considerar que aquest punt és P .

Com que S és superfície localment euclidiana existirà un entorn $B_\varepsilon(p(P))$ isomètric a un disc del pla. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que és $B_\varepsilon(P)$. Podem rotar i reflectir $B_\varepsilon(P)$ de manera que tot subdisc coincideixi amb la imatge de p . Notem aquesta

isometria com $f : B_\varepsilon(P) \rightarrow B_\varepsilon(p(P))$.

Per com hem escollit P tindrem que p és isometria en tot disc de la forma $B_\delta(Q)$ amb δ prou petit i $Q \in OP$, tal i com veiem en la Figura 1.6. Així doncs, f i p coincidiran en els discos $B_\delta(Q)$. Però també coincidiran en les prolongacions dels segments que surten de O i passen per $B_\delta(Q)$, doncs les dos són isometries i preserven distàncies i alineacions. Però la unió d'aquests segments inclou un veïnat de P , cosa que porta a contradicció.

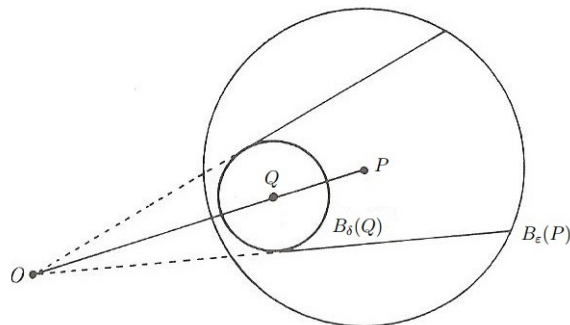


Figura 1.6: Entorn del punt P .

(ii) Per demostrar que p és exhaustiva primer notem que envia tot segment tancat $\alpha \in \mathbb{R}^2$ a un segment de S .

Podem dividir el segment α en subsegments que estiguin inclosos en discos de \mathbb{R}^2 on p actui de forma isomètrica. Ara, $p(\alpha)$ és un conjunt de segments en S que es troben amb angle π , per tant, és un segment de S .

Suposem ara que p no és exhaustiva i considerem el conjunt no buit $S - p(\mathbb{R}^2)$. Com que p és isometria local tenim que $p(\mathbb{R}^2)$ inclourà una bola oberta per a tot $p(P)$ i serà obert. Així doncs resulta que $S - p(\mathbb{R}^2)$ és tancat.

Agafem ara un punt $Q_S \in S - p(P)$. Per ser S connexa, existirà un camí poligonal (format per trossos de segments enganxats) de $O_S = p(O)$ a Q_S i, per ser $S - p(\mathbb{R}^2)$ tancat, existirà un primer punt R_S del camí en $S - p(\mathbb{R}^2)$. Sigui T_S l'últim vèrtex del camí dins $p(\mathbb{R}^2)$, considerem un segment $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ tal que $p(\tilde{\alpha})$ vagi al tros inicial del segment $T_S R_S$. Estenent $\tilde{\alpha}$ podem conseguir que la seva imatge inclogui tots els punts de $T_S R_S \cap p(\mathbb{R}^2)$ i, per continuïtat, també inclourà R_S , cosa que porta a contradicció. \square

1.6 Grup de recobriments isomètrics

1.6.1 Definició. Diem que $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és un recobriment isomètric d'un recobriment $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ si $fg(P) = f(P) \forall P \in \mathbb{R}^2$ (i.e. $g(P) \simeq P \forall P \in \mathbb{R}^2$).

Veiem que els recobriments isomètrics d'un recobriment p formen un grup.

1.6.2 Proposició. Sigui G el conjunt de tots els recobriments isomètrics de p , llavors G és un grup.

Demostració. Directe si notem que si g és recobriment, llavors $g(P) \simeq P \forall P \in \mathbb{R}^2$. El que implica que per tota parella de recobriments g_1 i g_2 es té que $g_1 g_2$ és recobriment, i que si g és recobriment, llavors g^{-1} és recobriment. \square

A aquest grup G l'anomenarem grup de recobriments isomètrics. Fixem-nos ara que, per un $P \in \mathbb{R}^2$ fixat, la seva G -òrbita és enviada al mateix punt de S pel recobriment p . Cosa que justifica que canviem la notació de grup G per grup Γ , ja que serà un grup de moviments del pla que defineixen la relació d'equivalència que genera S .

Per veure que p és la funció que envia les Γ -òrbites al seu punt imatge a S en falta veure el següent.

1.6.3 Teorema. Si $p(P) = p(Q)$ llavors $Q = g(P)$ per algun recobriment isomètric g (i.e. P i Q són a la mateixa Γ -òrbita).

Demostració. Per la propietat d'isometria local de p hi haurà el disc $B_\varepsilon(P)$ entorn de P i $B_\varepsilon(Q)$ entorn de Q tals que p els enviarà isomètricament a S de manera que $p(B_\varepsilon(P)) = p(B_\varepsilon(Q))$.

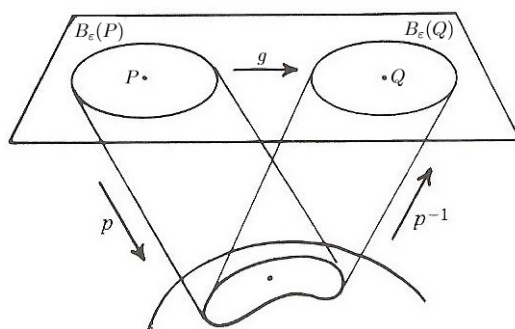


Figura 1.7

Per tant, existirà una funció p^{-1} tal que

$$B_\varepsilon(P) \xrightarrow{p} p(B_\varepsilon(P)) \xrightarrow{p^{-1}} B_\varepsilon(Q)$$

és una isometria $g : B_\varepsilon(P) \rightarrow B_\varepsilon(Q)$ (Figura 1.7) que pel lema 1.3.13 es pot estendre de forma única a una isometria $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Volem veure ara que g serà un recobriment isomètric.

Suposem que no i que es té que $p(R) \neq pg(R)$ per algun punt $R \in \mathbb{R}^2$. Pel mateix argument que en el teorema 1.5.6 tindrem que el conjunt de tots aquests punts és tancat i, per tant, existeix el mínim més proper a P . Suposem que és R i considerem una successió $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de punts en la recta PR que té com a límit R . Per hipòtesis $p(R_i) = pg(R_i)$ i per continuïtat de p i g es tindrà

$$p(\lim_{i \rightarrow \infty} R_i) = pg(\lim_{i \rightarrow \infty} R_i)$$

el que implica

$$p(R) = pg(R)$$

Per tant arribem a una contradicció i g serà recobriment isomètric. \square

1.6.4 Corol·lari. *Teorema de Killing-Hopf.* Tota superfície completa, connexa i localment euclidiana és de la forma \mathbb{R}^2/Γ i, per tant, serà un cilindre, una cinta de Möbius, un tor, una ampolla de Klein o el propi pla.

Demostració. Directe a partir del teorema anterior, el teorema 1.5.6 i el corol·lari 1.4.14. □

En els capítols següents també hi haurà una versió del teorema de Killing-Hopf on caldran modificacions en certs punts. Els punts a remarcar serien:

- El lema 1.3.13.
- La construcció de la funció pinzell, explicada en la definició 1.5.5.
- Els generadors del grup Γ esmentats en el corol·lari 1.4.14.

Observació. Podem classificar les superfícies euclidianes de la forma següent:

Superfície euclidiana	Compacta	No Compacta
Orientable	Tor	Pla i Cilindre
No Orientable	Ampolla de Klein	Cinta de Möbius

Capítol 2

Superfícies El·líptiques

Vistes les diferents superfícies localment euclidianes llevat d'isometries, ara ens podem preguntar quines altres superfícies hi ha i si es poden classificar d'alguna altra manera. Quan es parla de superfícies no euclidianes l'exemple que apareix primer és el de l'esfera.

2.0.5 Exemple. *L'esfera.* L'esfera, com ja és sabut, és una superfície inclosa en \mathbb{R}^3 definida per

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

on r és el radi de l'esfera.

No serà superfície euclidiana, ja que els triangles en l'esfera no compleixen una propietat ben coneguda quan estan en el pla euclidià, que és que els seus tres angles interiors sumin π .

Efectivament, si considerem el triangle amb vèrtexs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$, els seus angles interiors són els tres $\frac{\pi}{2}$ i, per tant, no compleixen la propietat anterior.

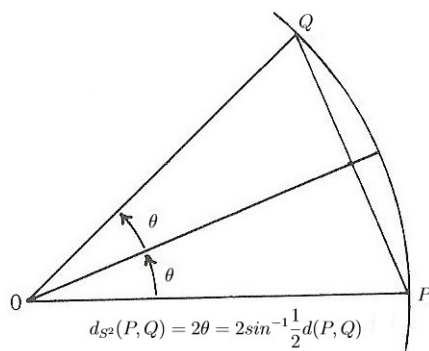


Figura 2.1: Distància entre dos punts sobre l'esfera.

Així doncs, no serà superfície euclidiana, tant si considerem la distància $d(\cdot, \cdot)$ induïda per \mathbb{R}^3 , com la definida per

$$d_{S^2}(P, Q) = 2\theta = 2\sin^{-1}\frac{1}{2}d(P, Q) \quad (2.0.1)$$

tal i com veiem en la Figura 2.1. Observem però que la segona distància depèn directament de la induïda per \mathbb{R}^3 , així, en comptes de fer servir la distància natural en S^2 podem usar l'euclidiana a l'hora de treballar amb l'esfera, cosa que facilita els càlculs.

Nota. D'ara endavant suposarem, si no s'esmenta el contrari, que $r = 1$.

2.1 Isometries de l'esfera

Tal i com hem fet en el capítol anterior, anem ara a estudiar les isometries de l'esfera. Notem, abans, que podem generalitzar-les com isometries de \mathbb{R}^3 .

2.1.1 Proposició. Tota isometria de S^2 la podem veure com la restricció d'una isometria de \mathbb{R}^3 . La isometria de tot l'espai però ha de complir que deixa l'origen fix perquè la restricció sigui isometria de l'esfera.

Demostració. Donada una isometria de l'esfera $f : S^2 \rightarrow S^2$, queda determinada una isometria de l'espai $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, doncs tota isometria de \mathbb{R}^3 es pot determinar a partir de quatre punts no coplanaris (1 punt més que a \mathbb{R}^2).

Llavors, \tilde{f} deixa l'origen fix. Una trivialitat, doncs si $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ restringeix a $f : S^2 \rightarrow S^2$ (ambdues isometries), vol dir que $\tilde{f}(S^2)$ està inclòs en S^2 i, per tant, per ser \tilde{f} isometria, $\tilde{f}(0) = 0$. \square

2.1.2 Corol·lari. Les isometries de S^2 seran rotacions, simetries respecte de plans que passin per l'origen o respecte del propi origen i combinacions d'aquestes, donat que, si les mirem com isometries a \mathbb{R}^3 , l'origen ha de ser un punt fix.

Notarem les rotacions d'angle θ respecte una recta l com $R_{l,\theta}$ i les simetries respecte un pla π com S_π .

Nota. Anomenarem funció antipodal a la simetria respecte de l'origen

$$\begin{aligned} \alpha : S^2 &\rightarrow S^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (-x, -y, -z) \end{aligned}$$

Observació. Fixem-nos que de les isometries esmentades les úniques que preserven orientació són les rotacions.

2.1.3 Lema. El conjunt de punts equidistant de $P, Q \in S^2$ és un pla que passa per l'origen i la simetria respecte d'aquest pla intercanvia P i Q .

Demostració. Siguin $P = (P_1, P_2, P_3)$ i $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ de S^2 . Si (x, y, z) està equidistant de P i Q es té

$$(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2 + (z - P_3)^2 = (x - Q_1)^2 + (y - Q_2)^2 + (z - Q_3)^2$$

Per ser P i Q de S^2 tenim $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1$ i podem simplificar l'equació

$$P_1x + P_2y + P_3z = Q_1x + Q_2y + Q_3z$$

$$\Updownarrow$$

$$(P_1 - Q_1)x + (P_2 - Q_2)y + (P_3 - Q_3)z = 0$$

Que és l'equació d'un pla que passa per l'origen.

Si suposem, sense pèrdua de generalitat, que P i Q estan en el pla $z = 0$ i són reflexes l'un de l'altre respecte l'eix x tenim $P = (\alpha, \beta, 0)$ i $Q = (\alpha, -\beta, 0)$. Llavors el pla equidistant serà $y = 0$, simetria que evidentment intercanvia P i Q . \square

2.1.4 Definició. Definirem un segment de l'esfera com una corba $\alpha : I \rightarrow S^2$ tal que, si ho veiem a \mathbb{R}^3 , $\alpha(I)$ està inclosa en un pla que passa per l'origen. És a dir, si és un tros de circumferència de radi màxim.

Aquesta definició encaixa perfectament amb la de distància donada en (2.0.1).

2.1.5 Definició. L'angle format entre dos segments de l'esfera serà el mateix que el format pels plans induïts per aquests.

2.1.6 Definició. Estendrem un segment α enganxant-lo amb un altre segment de manera que formin un angle π o, el que és el mateix, que el nou segment generat compleixi la definició 2.1.4.

Observació. Tres punts de S^2 estan alineats si els tres cauen sobre un segment de S^2 .

2.1.7 Lema. Anàlogament al lema 1.3.13 de \mathbb{R}^2 , una isometria f de l'esfera està determinada per la imatge de tres punts A , B i C de S^2 no alineats.

2.1.8 Proposició. Una rotació es pot expressar com la composició de dues simetries i, recíprocament, la composició de dues simetries és una rotació.

Demostració. De la mateixa manera que en \mathbb{R}^2 una rotació R_θ és el mateix que la composició $S_{l_1}S_{l_2}$ amb l_1 i l_2 dues rectes que passen per l'origen i que formen angle $\frac{\theta}{2}$. En S^2 la rotació $R_{l,\theta}$ és la composició $S_{\pi_1}S_{\pi_2}$ amb π_1 i π_2 dos plans que passen per la recta l i que formen angle $\frac{\theta}{2}$.

Si ens restringim a la isometria induïda als plans perpendiculars a l l'analogia és directa. \square

2.1.9 Corol·lari. Les isometries de S^2 formen un grup, que notarem com $Isom(S^2)$

2.1.10 Corol·lari. Tota isometria de S^2 és el producte d'una, dues o tres simetries.

Demostració. Si $\varphi \in Isom(S^2)$ és una simetria, ja estem. Si és una rotació, per la proposició anterior, és la composició de dues simetries. I si és la composició d'una rotació amb una simetria, és trivialment la composició de tres simetries.

Ens quedaria comprovar que la composició de dues rotacions es pot expressar com la composició de tres simetries o menys, però com veurem en el teorema següent la composició de dues rotacions és altre cop una rotació. \square

2.1.11 Teorema. La composició de dues rotacions de $Isom(S^2)$ és una altra rotació.

Demostració. Donades les rotacions R_{l_1,θ_1} i R_{l_2,θ_2} considerarem les simetries S_π , S_{π_1} i S_{π_2} on π és el pla generat per les rectes l_1 i l_2 , π_1 és el pla obtingut en rotar el pla π respecte a la recta l_1 un angle $\frac{\theta_1}{2}$ i π_2 és el pla obtingut en rotar el pla π respecte a la recta l_2 un angle $-\frac{\theta_2}{2}$.

Llavors tindrem

$$R_{l_1,\theta_1} = S_{\pi_1}S_\pi$$

$$R_{l_2,\theta_2} = S_\pi S_{\pi_2}$$

D'on resulta que

$$R_{l_1,\theta_1}R_{l_2,\theta_2} = S_{\pi_1}S_\pi S_{\pi_2}S_\pi = S_{\pi_1}S_{\pi_2} = R_{l,\theta}$$

On l és la intersecció dels plans π_1 i π_2 i θ l'angle que hi ha entre els plans π_2 i π_1 . \square

2.1.12 Corol·lari. Les rotacions de S^2 formen un subgrup que notarem per $Isom^+(S^2) \subset Isom(S^2)$.

2.2 Superfícies El·líptiques

Ens preguntem ara quines superfícies són localment isomètriques a l'esfera, superfícies que notarem amb el nom de superfícies localment el·líptiques.

2.2.1 Definició. Direm que una superfície S és localment el·líptica quan per a tot punt $A \in S$ existeixi un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A)$ és isomètric a un disc de l'esfera.

Tal i com vam fer en el primer capítol per les superfícies euclidianes, busquem ara grups de moviments de $Isom(S^2)$ que puguin donar lloc superfícies localment el·líptiques. Exigirem a Γ que sigui altre cop discontinu i sense punts fixos, el que ens porta a la proposició següent.

2.2.2 Proposició. Si un grup de moviments de l'esfera Γ és discontinu i sense punts fixos, llavors $S = \mathbb{S}^2/\Gamma$ és superfície localment el·líptica.

Demostració. És anàloga a la de la proposició 1.4.12 tenint en compte la mètrica esfèrica. □

Volem ara trobar els grups Γ discontinus i sense punts fixos. Al ser sense punts fixos, totes les rotacions queden descartades, doncs sempre tenen dos punts fixos, i les simetries respecte de plans també, donat que deixen fix el cercle de radi màxim donat per la intersecció del pla i l'esfera.

A més, per ser les rotacions les úniques isometries de l'esfera que preserven orientació, i del fet que la composició de dues isometries que no la preserven sí ho fa, es dedueix que l'únic subgrup Γ no trivial serà $\{Id, f\}$. Amb f isometria que no preserva orientació i tal que $f^2 = Id$.

2.2.3 Teorema. L'única isometria sense punts fixos, que no preserva l'orientació i que $f^2 = Id$ és la funció antipodal.

Demostració. Considerem el conjunt

$$D = \{\varphi \in Isom(S^2) \mid \varphi \text{ no preserva orientació i sense punts fixos}\}$$

La funció f esmentada, si existeix, ha de ser dins del grup D , on totes les isometries seran de la forma $\alpha R_{(l,\theta)}$, doncs l'única opció de que φ sigui dins D és que sigui la composició d'una isometria que preserva orientació i d'una altre que no ho faci (ja hem vist que rotacions i simetries respecte plans no hi poden ser i a més f no preserva orientació). Les opcions que quedarien són de la forma $\alpha R_{(l,\theta)}$ i $S_\pi R_{(l,\theta)}$. Però per la proposició 2.1.8 tenim que $S_\pi R_{(l,\theta)} = S_{(l',\theta')}$.

Considerem ara $f = \alpha R_{(l,\theta)}$, μ el pla perpendicular a l que passa per l'origen i C la intersecció de μ amb l'esfera. Sigui $P \in C$, la seva imatge $\alpha R_{(l,\theta)}(P) = P'$ és un punt en C rotat un angle $\pi + \theta$ respecte P . Tornem a aplicar f a P' , $\alpha R_{(l,\theta)}(P') = Q$ que serà un

punt en C rotat $2\pi + 2\theta = 2\theta$ respecte P .

Per l'enunciat tindrem que

$$P = Q \Leftrightarrow 2\theta = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Però si $\theta = \pi$ tindrem que $P' = P$, el que implica que $\alpha R_{(l,\theta)}$ tindria punts fixos. Per tant

$$\theta = 0 \Leftrightarrow R_{(l,\theta)} = Id \Leftrightarrow f = \alpha$$

□

2.2.4 Corol·lari. L'única superfície localment el·líptica no trivial de la forma S^2/Γ és $S = S^2/\{Id, \alpha\}$.

La superfície $S = S^2/\{Id, \alpha\}$ s'anomena pla el·líptic o projectiu i els seus punts són les parelles antipodals de l'esfera, el notarem per \mathbb{P}^2 .

Volem ara demostrar el recíproc de la proposició 3.5.3. Notem abans que la definició de superfície completa depenia de que l'angle que formessin els segments fos π . Considerem ara que l'angle que formen ve donat per la definició 2.1.5.

2.2.5 Teorema. *Teorema de Killing-Hopf.* Tota superfície completa, connexa i localment el·líptica és de la forma S^2/Γ i, per tant, només i hauran l'esfera i el pla projectiu.

Demostració. El procediment i les deduccions són les mateixes que en el primer capítol i l'únic que pot portar a conflicte és el fet que des de un punt origen $O \in S^2$ la funció pinzell en l'esfera acaba intersecant en el punt antipodal de l'origen. Per tant, podria donar-se el cas en que punts a distància propera a π de O tinguessin imatges molt distants. Això, però, no és possible gràcies a la propietat d'isometria local de p ; punts propers a l'antipodal han d'anar a parar a punts propers en S . □

2.3 L'esfera i els complexos

Com és ben sabut, no hi ha cap funció bijectiva entre S^2 i \mathbb{R}^2 , però hi ha una funció, la projecció estereogràfica, que envia tota l'esfera menys un punt al pla euclidià de forma bijectiva. Usant aquesta projecció, analitzarem les isometries de S^2 en termes de funcions complexes.

2.3.1 Definició. *Projecció Estereogràfica.* La projecció estereogràfica (Figura 2.2) envia tota l'esfera menys el pol Nord $N = (0, 0, 1)$ al pla $\{z = 0\}$ de la següent forma: sigui $P \in S^2 \setminus N$, la imatge de P serà la intersecció del raig NP amb el pla $\{z = 0\}$. Sigui ara $P' = (u, v)$ la imatge de $P = (x, y, z)$, es tindrà que el segment NP' té equacions paramètriques

$$x = tu \quad y = tv \quad z = 1 - t \tag{1}$$

I si l'intersequem amb l'esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) s'obté

$$(tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1 \Leftrightarrow t^2(u^2 + v^2 + 1) = 2t$$

Que té les dues solucions

$$\begin{cases} t = 0 & \text{corresponent a } N \\ t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1} & \text{corresponent a } P \end{cases}$$

Substituint l'últim en (1) s'obté

$$(x, y, z) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

La relació inversa, resolent directament (1), serà

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x}{1-z} \quad v = \frac{y}{t} = \frac{y}{1-z}$$

ben definit per a tot punt de $S^2 \setminus N$.

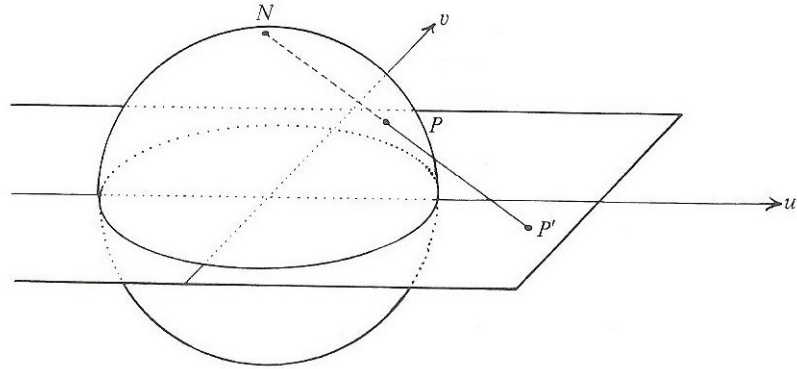


Figura 2.2: Projecció estereogràfica.

El fet que N no tingui imatge no és cap catàstrofe, ja que es pot solucionar veient el pla euclidià com el pla de nombres complexos afegint l'infinit, que serà on s'envia el pol Nord. La relació entre les isometries de S^2 i les funcions complexes es pot dur a terme a través del que anomenarem inversió.

2.3.2 Definició. *Inversió.* L'invers d'un punt $P \neq O$ respecte C , una circumferència del pla euclidià de radi ρ centrada en O , és el punt P_C que es troba sobre el raig OP i que satisfà

$$|OP||OP_C| = \rho^2$$

2.3.3 Teorema. Sigui S_π la simetria de S^2 respecte el pla π , la funció induïda per les imatges de la projecció estereogràfica és una inversió.

Demostració. Siguin $P = (P_1, P_2, P_3)$ i $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ dos punts de S^2 intercanviats per S_π . El pla π tindrà equació $(P_1 - Q_1)x + (P_2 - Q_2)y + (P_3 - Q_3)z = 0$.

Els punts inclosos en π que també són de l'esfera compliran, tal com veiem en la definició 2.3.1, l'equació

$$\left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

en termes de les seves coordenades u, v del pla estereogràfic.

Per tant els punts imatge del pla que són de S^2 compliran

$$(P_1 - Q_1) \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} + (P_2 - Q_2) \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} + (P_3 - Q_3) \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} = 0$$

Que podem escriure com

$$\left(u + \frac{P_1 - Q_1}{P_3 - Q_3} \right)^2 + \left(v + \frac{P_2 - Q_2}{P_3 - Q_3} \right)^2 = 1 + \left(\frac{P_1 - Q_1}{P_3 - Q_3} \right)^2 + \left(\frac{P_2 - Q_2}{P_3 - Q_3} \right)^2$$

que és l'equació d'un cercle de centre $c = \left(-\frac{P_1 - Q_1}{P_3 - Q_3}, -\frac{P_2 - Q_2}{P_3 - Q_3} \right)$ i radi

$$\rho = \sqrt{1 + \left(\frac{P_1 - Q_1}{P_3 - Q_3} \right)^2 + \left(\frac{P_2 - Q_2}{P_3 - Q_3} \right)^2} = \frac{\sqrt{2(1 - P_1Q_1 - P_2Q_2 - P_3Q_3)}}{P_3 - Q_3}$$

on hem usat que $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1$.

Notarem al cercle de centre c i radi ρ per $C_\rho(c)$.

Per descomptat, aquesta equació serà vàlida per $P_3 \neq Q_3$. Quan tinguem la igualtat el "cercle" imatge serà la línia l

$$(P_1 - Q_1)u + (P_2 - Q_2)v = 0$$

Veiem ara que les imatges estereogràfiques de P i Q són inversions respecte $C_\rho(c)$ o, si $P_3 = Q_3$, simetries respecte la recta l .

Per l'apartat 2.3.1, les imatges de P i Q són respectivament

$$P' = \left(\frac{P_1}{1 - P_3}, \frac{P_2}{1 - P_3} \right) \text{ i } Q' = \left(\frac{Q_1}{1 - Q_3}, \frac{Q_2}{1 - Q_3} \right)$$

i per tant els seus vectors seran

$$\begin{aligned} c_1 P' &= \left(\frac{P_1 - Q_1}{P_3 - Q_3} + \frac{P_1}{1 - P_3}, \frac{P_2 - Q_2}{P_3 - Q_3} + \frac{P_2}{1 - P_3} \right) = \\ &\quad \frac{1}{(P_3 - Q_3)(1 - P_3)} (P_1 - Q_1 + P_3Q_1 - P_1Q_3, P_2 - Q_2 + P_3Q_2 - P_2Q_3) \\ c_2 Q' &= \left(\frac{P_1 - Q_1}{P_3 - Q_3} + \frac{Q_1}{1 - Q_3}, \frac{P_2 - Q_2}{P_3 - Q_3} + \frac{Q_2}{1 - Q_3} \right) = \\ &\quad \frac{1}{(P_3 - Q_3)(1 - Q_3)} (P_1 - Q_1 + P_3Q_1 - P_1Q_3, P_2 - Q_2 + P_3Q_2 - P_2Q_3) \end{aligned}$$

que efectivament són proporcionals (linealment dependents).

El producte de les normes dels dos vectors serà (notem $\gamma = \frac{1}{(P_3 - Q_3)^2(1 - P_3)(1 - Q_3)}$)

$$\begin{aligned}
|c_1 P'| |c_2 Q'| &= \\
\gamma ([P_1 - Q_1 + P_3 Q_1 - P_1 Q_3]^2 + [P_2 - Q_2 + P_3 Q_2 - P_2 Q_3]^2) &= \\
\gamma ([P_1(1 - Q_3) - Q_1(1 - P_3)]^2 + [P_2(1 - Q_3) - Q_2(1 - P_3)]^2) &= \\
\gamma ([P_1(1 - Q_3) - Q_1(1 - P_3)]^2 + [P_2(1 - Q_3) - Q_2(1 - P_3)]^2) &= \\
\frac{1}{(P_3 - Q_3)^2} \left((P_1^2 + P_2^2) \frac{1 - Q_3}{1 - P_3} + (Q_1^2 + Q_2^2) \frac{1 - P_3}{1 - Q_3} - 2P_1 Q_1 - 2P_2 Q_2 \right) &= \\
\text{(usem } P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1) & \\
\frac{1}{(P_3 - Q_3)^2} \left((1 - P_3^2) \frac{1 - Q_3}{1 - P_3} + (1 - Q_3^2) \frac{1 - P_3}{1 - Q_3} - 2P_1 Q_1 - 2P_2 Q_2 \right) &= \\
\frac{1}{(P_3 - Q_3)^2} (2 - 2P_1 Q_1 - 2P_2 Q_2 - 2P_3 Q_3) = \rho^2 &
\end{aligned}$$

Per tant P' i Q' són inversions del cercle $C_\rho(c)$.

Si $P_3 = Q_3$ les imatges seran

$$P' = \left(\frac{P_1}{1 - P_3}, \frac{P_2}{1 - P_3} \right) \text{ i } Q' = \left(\frac{Q_1}{1 - P_3}, \frac{Q_2}{1 - P_3} \right)$$

i si calculem la recta per la qual són simetries (mediatriu) en resulta la recta l . □

Nota. Els cas en que P_3 o Q_3 valen 1 l'hem ignorat, doncs si fos el cas serien el pol nord N , que no té imatge.

Volem ara representar la inversió en els complexos, de manera que $w = u + iv$. Si considerem el disc unitat centrat en l'origen C , es té que la inversió de $w = \rho e^{i\theta}$ amb $\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ és $\rho^{-1} e^{i\theta} = \frac{1}{\bar{w}}$.

Per tant la inversió respecte C serà la funció $I(w) = \frac{1}{\bar{w}}$. Amb aquesta notació demostrarem el següent teorema.

2.3.4 Teorema. La inversió I té les següents propietats:

- (i) Envia cercles a cercles.
- (ii) Preserva la magnitud dels angles, però els inverteix l'orientació.

Demostració. Remarquem primer que no hi ha pèrdua de generalitat el considerar el cercle C , doncs el punt on estigui centrat el cercle i el radi d'aquest no afecten a les dos propietats que es volen demostrar (si el radi varia només variem l'escala de la inversió).

- (i) Considerem el cercle $C_r(c)$ amb centre $c \in \mathbb{C}$ i radi $r \in \mathbb{R}^+$. La seva equació serà

$$r^2 = |w - c|^2 = (w - c)(\bar{w} - \bar{c}) = w\bar{w} - \bar{c}w - c\bar{w} + c\bar{c}$$

que reescriurem com

$$w\bar{w} - \bar{c}w - c\bar{w} + \sigma = 0$$

amb $\sigma = c\bar{c} - r^2$.

Notem que la funció I és autoinversa, i per tant envia els punts del cercle $C_r(c)$ als punts que compleixen

$$\frac{1}{\bar{w}w} - \frac{\bar{c}}{\bar{w}} - \frac{c}{w} + \sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma w\bar{w} - \bar{c}w - c\bar{w} + 1 = 0$$

que és l'equació d'un cercle.

(ii) I és la conjugació de les funcions $w \mapsto \frac{1}{w}$ i $w \mapsto \bar{w}$. L'última funció preserva les magnituds dels angles i els hi inverteix l'orientació, cal doncs veure que $w \mapsto \frac{1}{w}$ preserva els angles.

Considerem $w + \delta e^{i\theta}$ que s'aproxima a w en direcció θ quan $\delta \rightarrow 0$.

Tindrem

$$\frac{1}{w + \delta e^{i\theta}} - \frac{1}{w} = \frac{-\delta e^{i\theta}}{w(w + \delta e^{i\theta})} \approx \frac{-\delta e^{i\theta}}{w^2}$$

On hem aproximat per δ molt petita.

Per tant $\frac{1}{w + \delta e^{i\theta}}$ s'aproxima a $\frac{1}{w}$ en direcció $\theta + \pi + \arg(w^{-2}) = \theta + \pi$. D'on deduïm que l'angle entre dues direccions diferents es preserva. \square

Hem demostrat el teorema per la inversió respecte al cercle unitat, però es pot estendre a tota inversió, doncs es poden expressar a partir de I composant amb translacions i homotècies. De fet, tindrem la proposició següent.

2.3.5 Proposició. La inversió I respecte del cercle de radi ρ i centre c , $C_\rho(c)$, ve donada per

$$I(w) = \frac{c\bar{w} + \rho^2 - c\bar{c}}{\bar{w} - \bar{c}} \quad (2.3.1)$$

Demostració. Com hem vist amb anterioritat, si $c = 0$ i $\rho = 1$ tindrem que $I(w) = \frac{1}{\bar{w}}$. Per tant, sabent això, podem expressar la inversió respecte de $C_\rho(c)$ en termes de la inversió respecte del cercle unitat C .

Si apliquem una translació al pla complex de vector $-c$ i fem una homotècia de factor $\frac{1}{\rho}$, enviem els punts de $C_\rho(c)$ a C . Podrem aplicar llavors la inversió que ja coneixem. El diagrama següent il·lustra els passos a fer:

$$w \xrightarrow{T_{-c}} w - c \xrightarrow{H_{\frac{1}{\rho}}} \frac{w - c}{\rho} \xrightarrow{I_C} \frac{\rho}{\bar{w} - \bar{c}} \xrightarrow{H_\rho} \frac{\rho^2}{\bar{w} - \bar{c}} \xrightarrow{T_c} \frac{\rho^2}{\bar{w} - \bar{c}} + c$$

On hem notat l'homotècia de vector c per H_c i la inversió respecte C com I_C .

Finalment tindrem que la inversió respecte $C_\rho(c)$ té expressió

$$I(w) = \frac{\rho^2}{\bar{w} - \bar{c}} + c = \frac{\rho^2 + c(\bar{w} - \bar{c})}{\bar{w} - \bar{c}} = \frac{c\bar{w} + \rho^2 - c\bar{c}}{\bar{w} - \bar{c}}$$

\square

El teorema anterior (el 2.3.4) implica el corol·lari següent.

2.3.6 Corol·lari. La projecció estereogràfica envia cercles a cercles i preserva la magnitud dels angles.

Demostració. Sigui C un cercle de S^2 amb centre el pol sud $S = (0, 0, -1)$, resulta evident que la projecció estereogràfica envia C a un cercle del pla $\{z = 0\}$. Sigui D un cercle qualsevol de S^2 , si considerem C amb el mateix radi i el pla π que passa per l'origen i equidista de S i el centre de D , pel teorema 2.3.3 la simetria induïda per π és una inversió vista en el pla $\{z = 0\}$.

Per tant, com que la inversió envia cercles a cercles, la projecció estereogràfica enviarà D a un cercle D' .

Que preserva magnituds dels angles es demostra de forma anàloga. \square

2.4 Geometria el·líptica vs. euclidiana

Fins ara hem vist les superfícies el·líptiques i euclidianes, hem vist que es generen amb una mètrica diferent, però no hem deixat constància de quines són les diferències que fan que les distingim. Una propietat que les distingeix, i de la qual ja havíem esmentat alguna cosa en l'exemple 2.0.5, és que els angles dels triangles en les superfícies esfèriques sumen més de π .

2.4.1 Teorema. Per tot triangle esfèric $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ amb angles α , β i γ es té que la funció

$$E(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad (2.4.1)$$

és proporcional a l'àrea del triangle $A(\Delta_{\alpha\beta\gamma})$ i, per tant, diferent de zero.

Demostració. Notem primer les següents propietats de l'àrea:

- (i) L'àrea d'un sector d'angle α entre dos cercles màxims és $\frac{\alpha}{2\pi}$ per l'àrea de S^2 , $A(S^2)$.
- (ii) L'àrea és invariant per isometries.
- (iii) L'àrea és additiva.

Considerem ara el triangle $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ i perllonguem els seus costats fins formar cercles màxims. L'esfera quedarà dividida en 8 triangles (Figura 2.3), notarem els triangles que delimiten les prolongacions dels costats i que comparteixen un costat amb $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ per Δ_α , Δ_β i Δ_γ (Δ_α comparteix el costat contrari a l'angle α i anàlogament amb els altres dos).

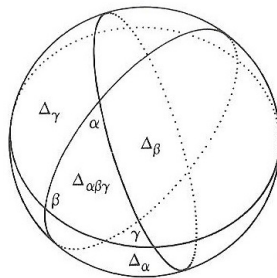


Figura 2.3: Esfera seccionada.

Tindrem:

$$\begin{aligned} A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + A(\Delta_\alpha) &= \frac{\alpha}{2\pi} A(S^2) \\ A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + A(\Delta_\beta) &= \frac{\beta}{2\pi} A(S^2) \\ A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + A(\Delta_\gamma) &= \frac{\gamma}{2\pi} A(S^2) \end{aligned}$$

Ajuntant les tres equacions resulta:

$$3A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + A(\Delta_\alpha) + A(\Delta_\beta) + A(\Delta_\gamma) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\pi} A(S^2)$$

D'altra banda, per simetria, tindrem:

$$A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + A(\Delta_\alpha) + A(\Delta_\beta) + A(\Delta_\gamma) = \frac{1}{2} A(S^2)$$

Si restem les dos equacions:

$$2A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{2\pi} A(S^2)$$

Per tant

$$A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = E(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) \frac{A(S^2)}{4\pi} \quad (2.4.2)$$

el que demostra el teorema. □

La conseqüència que se'n deriva d'aquest teorema és que cap superfície euclidiana és isomètrica a cap superfície el·líptica, doncs $E(\Delta_{\alpha\beta\gamma})$ és proporcional a $A(\Delta_{\alpha\beta\gamma})$. Per tant, en superfícies el·líptiques es té que

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$$

mentre que en una euclidiana

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

per a tot triangle euclidià $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$.

Observació. L'àrea d'una esfera és $A(S^2) = 4\pi r^2$, per tant podem expressar (2.4) com

$$A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = E(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) r^2$$

Tindrem doncs que en l'esfera unitat $A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Capítol 3

Superfícies Hiperbòliques

De la mateixa forma que començàvem el capítol dos introduint l'exemple més bàsic de superfície el·líptica, introduïrem ara el de superfície hiperbòlica: el pla hiperbòlic, que notarem per \mathbb{H}^2 .

3.0.2 Definició. Definirem el pla hiperbòlic com

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

i considerarem la seva mètrica com la definida per la distància infinitesimal

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (3.0.1)$$

on considerem $z = x + iy$.

3.0.3 Definició. Definirem la longitud d'una corba σ de \mathbb{H}^2 com

$$l(\sigma) = \int_{\sigma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \quad (3.0.2)$$

L'orientació de la corba σ l'escollirem de forma que el resultat sigui més gran o igual que zero.

3.0.4 Definició. Definirem la distància entre dos punts P i Q de \mathbb{H}^2 com

$$d(P, Q) = \inf \{l(\sigma) \mid \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2, \sigma(a) = P, \sigma(b) = Q\} \quad (3.0.3)$$

amb σ una corba C^∞ .

Si cal evitar confusions la notarem per $d_{\mathbb{H}^2}$.

Serà efectivament una distància, ja que compleix trivialment les dues primeres propietats i la tercera, la desigualtat triangular, la demostrarem en la següent secció, quan comptem amb l'ajut de les isometries.

Veiem abans un exemple més clarificador de superfície hiperbòlica.

3.0.5 Exemple. *La pseudoesfera.* Definim la pseudoesfera com la superfície de revolució de la tractiu, una corba amb equació $\varphi(s) = (u(s), v(s)) = (s - \tanh(s), \frac{1}{\cosh(s)})$. Per tant, les equacions paramètriques de la pseudoesfera seran:

$$\begin{cases} a = \frac{\cos(t)}{\cosh(s)} \\ b = \frac{\sin(t)}{\cosh(s)} \\ c = s - \tanh(s) \end{cases}$$

Veiem que és localment isomètrica al pla euclidià.

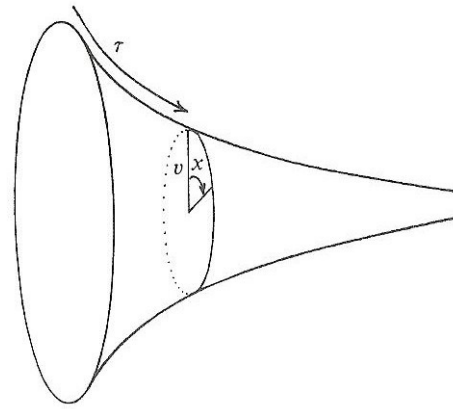


Figura 3.1: Pseudoesfera.

Primer considerarem la longitud al llarg de la tractiu, un paràmetre més natural que no pas s :

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^\sigma \sqrt{du^2 + dv^2} = \log(\cosh(\sigma)) \\ \tau &= \log(\cosh(\sigma)) \Leftrightarrow e^\tau = \cosh(\sigma) \Leftrightarrow v = e^{-\tau} \end{aligned}$$

On cometem l'abús de notació $v = v(\sigma)$.

Agafem ara τ i l'angle x (veure Figura 3.1) com a coordenades dels punts en la pseudoesfera. Llavors, la longitud sobre la secció circular d'angle dx serà $v dx = e^{-\tau} dx$ i, per tant, la distància infinitesimal respecte els punts (x, τ) i $(x + dx, \tau + d\tau)$ serà:

$$ds^2 = e^{-2\tau} dx^2 + d\tau^2$$

Si introduïm ara la variable $y = e^\tau$, i per tant $dy = e^\tau d\tau$, es té que

$$ds^2 = e^{-2\tau} (dx^2 + dy^2) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Així doncs amb aquesta distància la pseudoesfera és localment isomètrica al pla hiperbòlic. A més, fixem-nos en que $y = e^\tau > 0 \forall \tau \in \mathbb{R}$, tal i com succeeix en \mathbb{H}^2 .

3.1 Isometries del pla hiperbòlic

A l'hora d'estudiar les isometries de \mathbb{H}^2 tenim alguns inconvenients. Les isometries del pla hiperbòlic òbviament han de deixar invariant la distància definida en (3.0.3), que és el mateix que dir que deixi invariant la longitud (3.0.2) que, evidentment, serà equivalent a dir que deixi invariant ds , que vist en els complexos es pot expressar com

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} \quad (3.1.1)$$

Algunes funcions $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ que deixen invariant ds són:

- 1) $T_\alpha(z) = \alpha + z$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 2) $D_\rho(z) = \rho z$ amb $\rho \in \mathbb{R}$ positiu.
- 3) $S_{\{x=0\}}(z) = -\bar{z}$, simetria respecte l'eix y .

Que són funcions familiars en el pla euclidià, doncs no són res més que translacions, dilatacions i simetries, però vistes en \mathbb{H}^2 són isometries diferents. Per exemple, tot i que $D_\rho(z) = \rho z$ és una dilatació en el pla euclidià (o homotècia), com veurem més endavant en \mathbb{H}^2 és una translació, direm que és una \mathbb{H}^2 -translació.

Aquestes, però, no són les úniques isometries de \mathbb{H}^2 , de fet es trobarien a faltar les rotacions. Per introduir-les ens convindrà abans definir un altre espai a partir de \mathbb{H}^2 , el disc unitat \mathbb{D}^2 .

3.1.1 Definició. Definirem el disc unitat \mathbb{D}^2 a partir de \mathbb{H}^2 fent primer una inversió del pla complex respecte al cercle $C_{\sqrt{2}}(-i)$ seguit d'una simetria respecte a l'eix- x . L'equació de la inversió serà, per 2.3.1:

$$I_{C_{\sqrt{2}}(-i)}(z) = \frac{-i\bar{z} + 1}{\bar{z} - i}$$

Per tant, aplicant després la simetria respecte l'eix- x , tenim que

$$J(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$$

és l'aplicació que ens envia \mathbb{H}^2 a \mathbb{D}^2 i té per inversa la funció

$$J^{-1}(w) = \frac{-iw + 1}{w - i}$$

3.1.2 Definició. Definim la distància entre dos punts w_1 i w_2 de \mathbb{D}^2 com la distància entre les seves preimatges $J^{-1}(w_1)$ i $J^{-1}(w_2)$ en \mathbb{H}^2 .

Per tant, les isometries de \mathbb{D}^2 seran els conjugats JhJ^{-1} de les \mathbb{H}^2 -isometries h .

Volem ara veure que les rotacions euclidianes respecte l'origen són efectivament isometries

de \mathbb{D}^2 . Per veure-ho expressarem la distància $ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}$ de \mathbb{H}^2 en termes de $w = J(z)$

$$\begin{aligned} \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} &= \left| d \frac{-iw + 1}{w - i} \right| / \text{Im} \left(\frac{-iw + 1}{w - i} \right) = \\ &= \left| \frac{-2dw}{(w - i)^2} \right| / \text{Im} \left(\frac{(1 - iw)(\bar{w} - i)}{(w - i)(\bar{w} - i)} \right) = \\ &= \frac{|2dw|}{|w - i|^2} / \text{Im} \left(\frac{(1 - iw)(\bar{w} + i)}{|w - i|^2} \right) = \\ &= \frac{|2dw|}{1 - |w|^2} \end{aligned}$$

Tindrem que és invariant per rotacions respecte l'origen, doncs deixen $|w|$ invariant. Per tant tindrem la \mathbb{D}^2 -rotació:

4) $R_\theta(w) = e^{i\theta}w$ per $\theta \in \mathbb{R}$.

De fet, tota simetria respecte una recta que passi per l'origen també deixa $|w|$ invariant. En particular, tenim la \mathbb{D}^2 -simetria:

5) $S_{\{y=0\}}(w) = \bar{w}$, simetria respecte l'eix x .

D'aquí podem deduir dos tipus de \mathbb{H}^2 -simetries més a partir del canvi $J^{-1}dJ : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ (amb d \mathbb{D}^2 -isometria). La \mathbb{D}^2 -rotació respecte l'origen serà una \mathbb{H}^2 -rotació respecte i (doncs $J^{-1}(0) = i$), i la \mathbb{D}^2 -simetria passarà a ser una \mathbb{H}^2 -simetria (una inversió respecte el cercle unitat).

Veiem que efectivament $S_{\{y=0\}}$ en \mathbb{H}^2 serà una inversió respecte el cercle unitat:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{J} & \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{S_{\{y=0\}}} & \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{J^{-1}} & \mathbb{H}^2 \\ z & \longmapsto & \frac{iz+1}{z+i} & \longmapsto & \frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i} & \longmapsto & \frac{-i\frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i}+1}{\frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i}-i} = \frac{1}{\bar{z}} \end{array}$$

Així veiem que la inversió I respecte el cercle unitat és una \mathbb{H}^2 -isometria. De les isometries esmentades 1 i 2 es dedueix, de forma semblant a la proposició 2.3.1, que la inversió respecte el cercle $C_\rho(c)$ és una \mathbb{H}^2 -isometria.

Anem a agrupar les isometries que hem trobat de \mathbb{H}^2 i a anomenar-les en el propi espai (fins ara les anomenàvem pel que feien en el pla euclidià).

3.1.3 Proposició. Les isometries de \mathbb{H}^2 les classifiquem en

(i) Rotacions: Que són les funcions que vistes en \mathbb{D}^2 són de la forma $R_\theta(w) = e^{i\theta}w$ i composicions d'aquestes amb translacions i rotacions límit, que veiem a continuació.

(ii) Rotacions límit: Que són les funcions de la forma $RL_\alpha(z) = \alpha + z$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$. Aquest nom es deu al fet que són vistes com a rotacions de centre ∞ . Tenen un únic punt fix que és l'infinit

(iii) Translacions: Que són les funcions de la forma $T_\rho(z) = \rho z$ amb $\rho \in \mathbb{R}$ positiu i composicions d'aquestes amb rotacions límit.

(iv) Simetries: Que són les inversions respecte a cercles amb el centre sobre l'eix- x i les simetries euclidianes respecte a eixos paral·lels (euclidianament parlant) a l'eix- y . Les notarem per $S_{x=c}$ i I_C amb C un cercle.

Observació. Hem vist que les funcions anteriors són isometries de \mathbb{H}^2 , però no que siguin totes les que hi ha. Veurem més endavant, quan tinguem més eines, que efectivament és així (Proposició 3.4.3).

3.2 Línies de \mathbb{H}^2

Ja hem aprofundit bastant en els conceptes bàsics del pla hiperbòlic però encara ens manca una noció molt important: la de les rectes.

Fins ara havíem parlat de distància mínima entre punts, però no hem vist quines són les rectes, o tal i com notarem nosaltres les \mathbb{H}^2 -línies, que defineixen la distància (3.0.3).

3.2.1 Proposició. El segment L , tal com l’entendem en el pla euclidià, entre dos punts $P, Q \in \mathbb{H}^2$ que es troben sobre l’eix- y , és la corba C de \mathbb{H}^2 de totes les que uneixen P i Q de menor distància.

Demostració. La longitud d’una corba C que uneix P i Q és

$$l(C) = \int_C \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \geq \int_P^Q \frac{dy}{y} = l(L) \quad (3.2.1)$$

i, per tant, major que la longitud del segment L .

□

Nota. Agafarem l’orientació dels punts P, Q de manera que la longitud sigui positiva.

Observació. Fixem-nos que la demostració anterior és vàlida per tot parell de punts que tinguin la coordenada x igual. Per tant, tota recta (euclidiana) paral·lela a l’eix- y és una \mathbb{H}^2 -línia.

Volem ara trobar les \mathbb{H}^2 -línies restants, per fer-ho aplicarem a la \mathbb{H}^2 -línia $\gamma = \{x = 0\}$ que ja coneixem una isometria.

3.2.2 Exemple. Tenim que els punts que formen part de γ són

$$\gamma = \{w = x + iy \mid x = 0, y > 0\} = \{w = re^{i\frac{\pi}{2}} \mid r > 0\} = \{ri \mid r > 0\}$$

Si apliquem a γ una rotació de $\frac{\pi}{2}$ resulta:

$$ri \xrightarrow{J} \frac{1-r}{i(1+r)} \xrightarrow{i} \frac{1-r}{1+r} \xrightarrow{J^{-1}} \frac{1+r-i(1-r)}{1-r-i(1+r)}$$

Veiem quina “recta” defineixen aquests punts

$$\begin{aligned} \frac{1+r-i(1-r)}{1-r-i(1+r)} &= \frac{(1-r)+i(1+r)}{(1+r)+i(1-r)} \times \frac{(1+r)-i(1-r)}{(1+r)-i(1-r)} = \\ &= \frac{[(1-r)+i(1+r)][(1+r)-i(1-r)]}{(1+r)^2+(1-r)^2} = \\ &= \frac{2(1-r^2)+i[(1+r)^2-(1-r)^2]}{(1+r)^2+(1-r)^2} = \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2} + i \frac{2r}{1+r^2} \end{aligned}$$

que com podem comprovar pertanyen al cercle unitat

$$\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^2 + \left(\frac{2r}{1+r^2}\right)^2 = \frac{1-2r^2+r^4+4r^2}{(1+r^2)^2} = \frac{1+2r^2+r^4}{(1+r^2)^2} = \frac{(1+r^2)^2}{(1+r^2)^2} = 1$$

i a més la seva coordenada imaginària sempre és positiva

$$y = \frac{2r}{1+r^2} > 0 \text{ per } r > 0$$

Per tant, la rotació d'angle $\frac{\pi}{2}$ envia γ a la \mathbb{H}^2 -línia $\beta = \{w = x + iy \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$.

3.2.3 Proposició. Les \mathbb{H}^2 -línies són totes les rectes paral·leles euclidianament a l'eix- y i els semicercles amb y positiva centrats sobre l'eix- x .

Demostració. Ja hem vist que totes les rectes paral·leles euclidianament a l'eix- y ho són i que $\beta = \{w = x + iy \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$ també ho és.

Si apliquem translacions i rotacions límit a β podem obtenir qualsevol cercle centrat en l'eix- x .

Si tenim en compte que amb aquests tipus de rectes podem traçar una \mathbb{H}^2 -línia que passi per qualsevol parella de punts de \mathbb{H}^2 , veiem que aquestes seran tots les \mathbb{H}^2 -línies. \square

3.2.4 Definició. Dues \mathbb{H}^2 -línies tenen tres posicions relatives entre elles, poden tallar-se, ser asimptòtiques o ser ultraparal·leles.

Les dues últimes, vistes en \mathbb{D}^2 , són com es veu en la Figura 3.2.

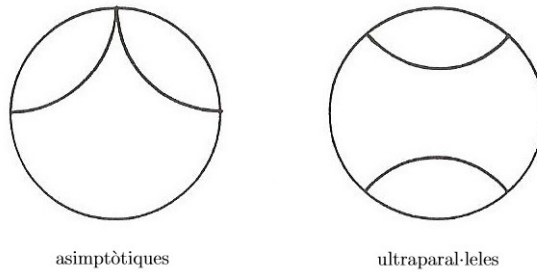


Figura 3.2: \mathbb{H}^2 -línies vistes en el disc \mathbb{D}^2 .

3.2.5 Definició. Notarem la corba de distància mínima en \mathbb{H}^2 entre dos punts P i Q per $L(P, Q)$ i l'anomenarem \mathbb{H}^2 -segment.

Hem definit a partir de l'eix- y les \mathbb{H}^2 -línies que també són rectes en el pla euclidià (en el semiplà superior) però la longitud d'aquestes es comporten totalment diferent, anem a veure-ho amb un exemple.

3.2.6 Exemple. Considerem els punts $P = (0, 1)$ i $Q = (0, \alpha)$. La longitud del \mathbb{H}^2 -segment $L(P, Q)$ serà:

Si $\alpha > 1$

$$l(L(P, Q)) = \int_P^Q \frac{dy}{y} = \log(\alpha) - \log(1) = \log(\alpha)$$

Si $\alpha < 1$

$$l(L(P, Q)) = \int_Q^P \frac{dy}{y} = \log(1) - \log(\alpha) = -\log(\alpha)$$

Fixem-nos que en el segon cas a mesura que $\alpha \rightarrow 0$ es té $l(L(P, Q)) \rightarrow \infty$

3.2.7 Corol·lari. *Desigualtat Triangular.* Si $P, Q, R \in \mathbb{H}^2$, es compleix que

$$l(L(P, R)) + l(L(R, Q)) \geq l(L(P, Q)) \quad (3.2.2)$$

Demostració. Suposem que P i Q cauen sobre l'eix- y , si no és així apliquem una rotació límit fins que P ho estigui, i després rotem respecte P fins que Q també ho estigui.

Sigui $C = L(P, R) \cup L(R, Q)$, per la proposició 3.2.1 tindrem

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_C \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_P^R \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} + \int_R^Q \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \\ &= l(L(P, R)) + l(L(R, Q)) \geq \int_P^Q \frac{dy}{y} = l(L(P, Q)) \end{aligned}$$

□

3.2.8 Definició. L'angle entre dos segments en \mathbb{H}^2 es calcula com es faria si ens ho miréssim en el pla euclidià.

Recordem de Geometria Diferencial que l'angle en una superfície depèn de la primera forma fonamental

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}$$

Es té que la del pla hiperbòlic és

$$\frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, per ser múltiple de la identitat, l'angle en \mathbb{H}^2 coincideix amb el de \mathbb{R}^2 .

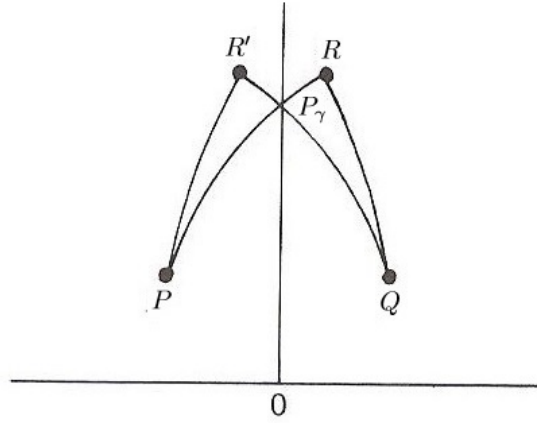
3.2.9 Definició. Per estendre un \mathbb{H}^2 -segment L de \mathbb{H}^2 l'enganxem amb un altra \mathbb{H}^2 -segment L' de manera que formin angle π , doncs els angles en el pla hiperbòlic es mesuren com en el pla euclidià.

3.3 Simetries en el pla hiperbòlic

3.3.1 Lema. El conjunt de punts \mathbb{H}^2 -equidistants de dos punts $P, Q \in \mathbb{H}^2$ és una H^2 -línia L , i la simetria respecte L intercanvia els dos punts.

Demostració. Suposem que P i Q són simètrics respecte l'eix- y . Si no és així, rotem respecte P fins que Q tingui la mateixa coordenada y i després apliquem una rotació límit fins que siguin equidistants a l'eix- y (euclidianament).

Resulta evident que la simetria $S_{x=0}$ intercanvia P i Q . Com que és una \mathbb{H}^2 -isometria que deixa fixos els punts de l'eix- y que notarem per γ , se'n deriva que els punts de γ

Figura 3.3: Conjunt de punts equidistants a P i Q .

són \mathbb{H}^2 -equidistants de P i Q . Per tant el conjunt de punts equidistants a P i Q inclou γ , que és una \mathbb{H}^2 -línia. Suposem que inclou un punt R que no és de l'eix- y i, per tant, també inclou la seva imatge $S_{x=0}(R) = R'$ (Figura 3.3). Sigui P_γ el punt on interseca els segment PR amb l'eix- y . Per simetria tindrem:

$$l(PR') = l(QR) = l(PR) = l(PP_\gamma) + l(P_\gamma R) = l(PP_\gamma) + l(P_\gamma R')$$

Per tant arribem a contradicció per la desigualtat triangular. Així doncs l'eix- y és tot el conjunt de punts equidistants a P i Q . \square

3.3.2 Definició. Direm que tres punts de \mathbb{H}^2 estan alineats si cauen sobre la mateixa \mathbb{H}^2 -línia

Com en el cas euclidià i el·líptic, tindrem el lema i el teorema següents.

3.3.3 Lema. Tota \mathbb{H}^2 -isometria està determinada per la imatge de tres punts A , B i C de \mathbb{H}^2 no alineats.

Demostració. Igual que la del lema 1.3.13 però amb la distància hiperbòlica. \square

3.3.4 Teorema. Tota \mathbb{H}^2 -isometria és el producte d'una, dues o tres \mathbb{H}^2 -simetries.

Demostració. És una conseqüència dels dos lemes anteriors. Doncs, si de tres punts no alineats A , B i C cap d'ells coincideix amb la seva imatge per la \mathbb{H}^2 -isometria h , llavors h és la composició de les tres simetries que envien cada punt a la seva imatge. Si un d'ells coincideix, serà el de les dos restants, i, si n'hi ha dos que coincideixen, serà la simetria que intercanvia el tercer punt i la seva imatge. \square

El lema i teorema anteriors impliquen, com en els dos casos anteriors, el següent corol·lari.

3.3.5 Corol·lari. Les \mathbb{H}^2 -isometries formen un grup, que notarem per $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Observació. Tal i com succeïa en els casos euclidià i esfèric distingirem entre \mathbb{H}^2 -isometries que preserven orientació (producte d'un nombre parell de simetries) i les que no la preserven (producte d'un nombre imparell de simetries).

3.4 Isometries com a funcions complexes

Dèiem al final de la secció 3.1 que calia comprovar que les \mathbb{H}^2 -isometries que havíem trobat eren totes les que hi havia. Per poder veure això ens ajudarem altre cop dels complexos. Havent vist que tota \mathbb{H}^2 -isometria és el producte de tres \mathbb{H}^2 -simetries o menys (teorema 3.3.4), veiem el teorema següent.

3.4.1 Teorema. Les \mathbb{H}^2 -isometries són de la forma

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

amb $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tals que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (preserven orientació) i

$$\bar{f}(z) = \frac{-\alpha\bar{z} + \beta}{-\gamma\bar{z} + \delta}$$

amb $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tals que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (no preserven orientació).

Demostració. Tenim que la inversió respecte al cercle $C_\rho(c)$ (una \mathbb{H}^2 -simetria) té equació $\bar{g}(z) = \frac{c\bar{z} + \rho^2 - c\bar{c}}{\bar{z} - \bar{c}}$ i determinant $-c^2 - \rho^2 + c^2 = -\rho^2$, si multipliquem el numerador i el denominador per $\frac{1}{\rho}$ tindrà determinant -1 .

Per altra banda, tenim que la \mathbb{H}^2 -simetria respecte la \mathbb{H}^2 -línia $\{x = \varepsilon\}$ té equació $\bar{h}(z) = \varepsilon - \overline{z - \varepsilon} = -\bar{z} + 2\varepsilon = \frac{-\bar{z} + 2\varepsilon}{1}$ i determinant -1 .

Per tant, la composició de qualsevol dues \mathbb{H}^2 -simetries serà una funció

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ amb determinant } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

La composició d'aquesta funció amb una altra \mathbb{H}^2 -simetria serà una funció

$$\bar{f}(z) = \frac{\alpha'\bar{z} + \beta'}{\gamma'\bar{z} + \delta'} \text{ amb determinant } \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1$$

que és el mateix que

$$\bar{f}(z) = \frac{-\alpha\bar{z} + \beta}{-\gamma\bar{z} + \delta} \text{ amb determinant } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

□

3.4.2 Lema. Una \mathbb{H}^2 -isometria que no preserva orientació \bar{f} té dos punts fixos en el cercle de l'infinit $\mathbb{R} \cup \infty$.

Demostració. Pel teorema anterior tindrem que

$$\bar{f}(z) = \frac{-\alpha\bar{z} + \beta}{-\gamma\bar{z} + \delta}$$

amb determinant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Per tant els punts fixos de $\mathbb{R} \cup \infty$ seran les solucions de

$$x = \frac{-\alpha x + \beta}{-\gamma x + \delta} \text{ per } x \in \mathbb{R} \cup \infty$$

doncs $x = \bar{x}$ en $\mathbb{R} \cup \infty$.

Distingim ara entre el cas en que $\gamma = 0$, que tindrà solucions $x_1 = \beta/(\alpha + \delta)$ i $x_2 = \infty$, i el cas en que $\gamma \neq 0$, que obtenim l'equació

$$x = \frac{-\alpha x + \beta}{-\gamma x + \delta} \Leftrightarrow \gamma x^2 - (\alpha + \delta)x + \beta = 0$$

amb solucions

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4\beta\gamma}}{2\gamma} = \\ &= \frac{\alpha + \delta \pm \sqrt{\alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta + 4\alpha\delta - 4\beta\gamma}}{2\gamma} = \\ &= \frac{\alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4}}{2\gamma} \end{aligned}$$

Com que $(\alpha - \delta)^2 + 4 > 0$ hi ha dos solucions i, per tant, \bar{f} té dos punts fixos en $\mathbb{R} \cup \infty$. \square

Veiem ara tota \mathbb{H}^2 -isometria serà d'un dels quatre tipus que ja hem esmentat.

3.4.3 Proposició. Una \mathbb{H}^2 -isometria f serà un d'aquests moviments

- (i) una rotació
- (ii) una rotació límit
- (iii) una translació
- (iv) una simetria

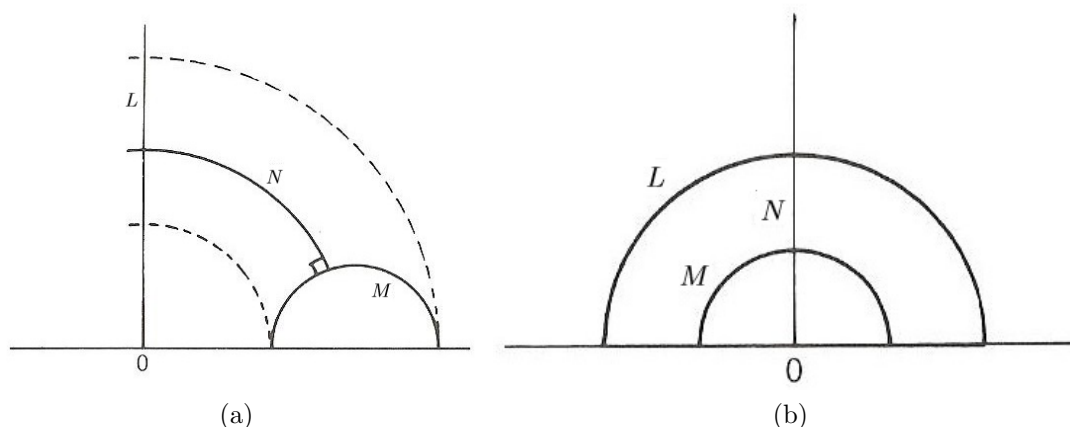
Demostració. Si f preserva orientació, serà la composició de dues simetries. Siguin L i M les dues \mathbb{H}^2 -línies respecte les que es fa la simetria, tindrem les següents opcions:

- (i) L i M es tallen. Fent un canvi de coordenades en \mathbb{D}^2 podem fer que es tallin en l'origen, per tant f serà una rotació.
- (ii) L i M són asimptòtiques. Fent canvi de coordenades podem fer que L sigui l'eix- y i que siguin asimptòtiques en l'infinit, per tant M serà $\{x = \alpha/2\}$. Així f serà la rotació límit RL_α .
- (iii) L i M són ultraparal·leles. Fent canvi de coordenades podem fer que L sigui l'eix- y i, per tant, que M sigui un semicercle disjunt de L . Sigui N la \mathbb{H}^2 -línia que es perpendicular a L i M (Figura 3.4a), fent un canvi de coordenades altre cop de manera que N passi a ser l'eix- y tindrem ara que L i M són dos semicercles de centre l'origen (Figura 3.4b). Per tant, resulta evident que f serà una \mathbb{H}^2 -translació.

Suposem ara que f no preserva orientació. Pel lema anterior tindrem que té dos punts fixos en $\mathbb{R} \cup \infty$, sigui L la \mathbb{H}^2 -línia que connecta els dos punts fixos, considerem l'isometria $g = fS_L$.

- (iv) Com que S_L també deixa els punts fixos, g serà una isometria que preserva orientació i que deixa fixos els dos punts. Com que preserva orientació, pot ser una rotació, una rotació límit o una translació, la única opció per a que a més deixi fixos els dos punts és que sigui una translació $g = T_\rho$. Així, $f = gS_L$ serà una simetria (amb lliscament si $\rho \neq 0$). \square

Així, ja tenim totes les isometries del pla hiperbòlic.

Figura 3.4: Dues \mathbb{H}^2 -línies disjunes (L i M).

3.5 Superfícies Hiperbòliques

3.5.1 Definició. Direm que una superfície S és localment hiperbòlica quan per a tot punt $A \in S$ existeixi un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A)$ és isomètric a un disc del pla hiperbòlic.

Com en els dos casos anteriors, buscarem superfícies que siguin de la forma $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$, amb Γ discontinu i sense punts fixos. En el cas hiperbòlic, com en l'euclidià, aquestes condicions restringeixen les rotacions. Però apart de les translacions i les simetries amb lliscament, en el cas hiperbòlic també tindrem les rotacions límit.

A més, en el cas hiperbòlic sorgirà un inconvenient:

3.5.2 Proposició. Els subgrups Γ de $Isom(\mathbb{H}^2)$ no tenen límit de generadors.

Demostració. Només cal fixar-se en el fet que podem afegir a Γ una translació sempre que cap de les que ja estiguin en Γ comparteixi el centre respecte el qual es fa la translació. És a dir, Γ pot tenir qualsevol nombre de translacions. \square

De totes maneres, seguim tenint la proposició següent.

3.5.3 Proposició. Si un grup de moviments del pla hiperbòlic Γ és discontinu i sense punts fixos, llavors $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ és superfície localment hiperbòlica.

Demostració. És anàloga a la de la proposició 1.4.12 tenint en compte la mètrica hiperbòlica. \square

I, com en els altres casos, tindrem el teorema de Killing-Hopf, que diu precisament el recíproc. En aquest cas, com en l'esfèric, cal notar que l'angle entre dos segments serà el donat per la definició 3.2.8. Doncs és necessari per definir superfície completa.

A més, la construcció de la funció pinzell serà anàloga considerant la mètrica hiperbòlica.

3.5.4 Teorema. *Teorema de Killing-Hopf.* Tota superfície completa, connexa i localment hiperbòlica és de la forma \mathbb{H}^2/Γ .

Demostració. Idèntica al primer capítol però, com ja s'ha esmentat, considerant la mètrica hiperbòlica. \square

3.6 Geometria hiperbòlica vs. euclidiana

Com hem fet en el capítol sobre superfícies el·líptiques, compararem ara les superfícies hiperbòliques amb les euclidianes calculant l'àrea d'un triangle hiperbòlic $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$. Distingirem abans un tipus especial de triangles hiperbòlics.

3.6.1 Definició. Direm que un triangle hiperbòlic és asimptòtic si dos dels seus costats són asimptòtics (Figura 3.5a). Com que els dos costats asimptòtics formaran angle $\gamma = 0$ podrem notar el triangle per $\Delta_{\alpha\beta}$.

Si té amplada euclidiana dx i alçada euclidiana dy l'àrea infinitesimal d'un triangle asimptòtic $\Delta_{\alpha\beta}$ serà

$$dA = dx dy / y^2 \quad (3.6.1)$$

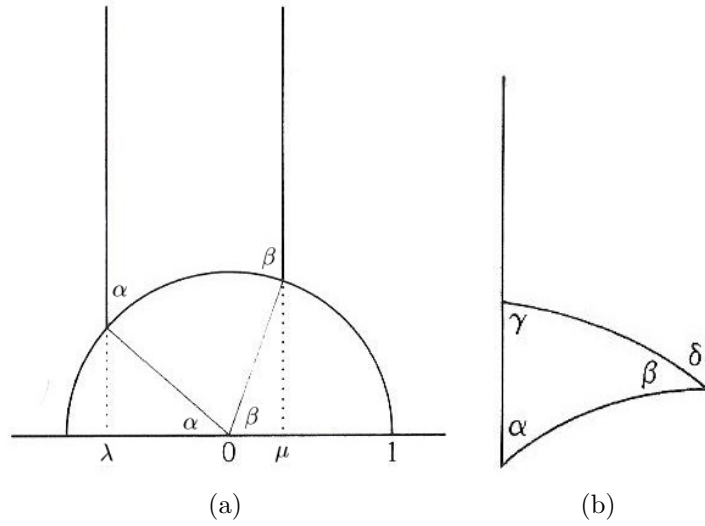


Figura 3.5: Triangle hiperbòlic asimptòtic.

3.6.2 Teorema. L'àrea d'un triangle asimptòtic $\Delta_{\alpha\beta}$ és $\pi - (\alpha + \beta)$.

Demostració. Sense pèrdua de generalitat podem considerar que el segment que no és asimptòtic és un tros del cercle amb centre l'origen i radi 1 (Figura 3.5a). Siguin λ i μ tal i com mostra la figura, tindrem que $\lambda = \cos(\pi - \alpha)$ i $\mu = \cos\beta$.

La fórmula (3.6.1) ens donarà que

$$A(\Delta_{\alpha\beta}) = \int \int_{\Delta_{\alpha\beta}} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\lambda}^{\mu} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} dx = \int_{\lambda}^{\mu} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

fent el canvi de variable $x = \cos\theta$ es té

$$\int_{\lambda=\cos(\pi-\alpha)}^{\mu=\cos\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta d\theta}{\sin\theta} = \pi - \alpha - \beta$$

□

3.6.3 Corol·lari. L'àrea d'un triangle hiperbòlic $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ és $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Demostració. Podem representar qualsevol triangle hiperbòlic $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ com la diferència de dos triangles asimptòtics (Figura 3.5b) $\Delta_{\alpha,\beta+\delta}$ i $\Delta_{\pi-\gamma,\delta}$ aplicant isometries primerament si cal.

Per la propietat additiva de l'àrea es té

$$\begin{aligned} A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) &= A(\Delta_{\alpha,\beta+\delta}) - A(\Delta_{\pi-\gamma,\delta}) = \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \delta) + \pi - (\pi - \gamma + \delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

□

La conseqüència que se'n deriva d'aquest corol·lari és que cap superfície euclidiana o el·líptica és isomètrica a cap superfície hiperbòlica, doncs $A(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Per tant, en superfícies hiperbòliques es té que

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$$

per a tot triangle hiperbòlic.

Havent vist que el conjunt de superfícies euclidianes, el·líptiques i hiperbòliques són disjunts ens topem amb un problema que ja s'ha esmentat amb anterioritat: no hi ha límit en els generadors dels grups Γ per generar les superfícies hiperbòliques. Per aquest motiu ens restringirem a superfícies compactes. Abans però introduïrem una forma de construir superfícies a partir de polígons.

3.7 Construcció de superfícies hiperbòliques a partir de polígons

3.7.1 Definició. Un polígon hiperbòlic Π és una regió de \mathbb{H}^2 delimitada per un camí poligonal de \mathbb{H}^2 -segments i segments de $\partial\mathbb{H}^2$ que notarem per arestes pròpies i impròpies respectivament.

Els punts d'unió entre vores els anomenarem vèrtexs de Π , que també els classificarem per vèrtexs propis, si es troben en \mathbb{H}^2 , i impropis, si es troben en $\partial\mathbb{H}^2$.

3.7.2 Exemple. Els polígons hiperbòlics també els podem definir sobre \mathbb{D}^2 , un exemple de polígon seria un octògon regular centrat en l'origen (Figura 3.6) i que el podem veure en \mathbb{H}^2 aplicant-li J^{-1} .

A partir de polígons hiperbòlics i d'identificacions de les seves arestes podem generar qualsevol superfície hiperbòlica.

3.7.3 Definició. Definirem un aparellament d'arestes d'un polígon hiperbòlic com una partició d'arestes pròpies en parelles $\{e, e'\}$ de longitud igual (pot ser infinita) amb una \mathbb{H}^2 -isometria $g_{e,e'} : e \rightarrow e'$.

Direm que els punts $w \in e$ i $g_{e,e'}(w) = w' \in e'$ són identificats per l'aparellament.

Pot passar amb els vèrtexs que s'identifiquin amb més d'un vèrtex, notarem el conjunt de vèrtexs identificats $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ com un cicle de vèrtexs.

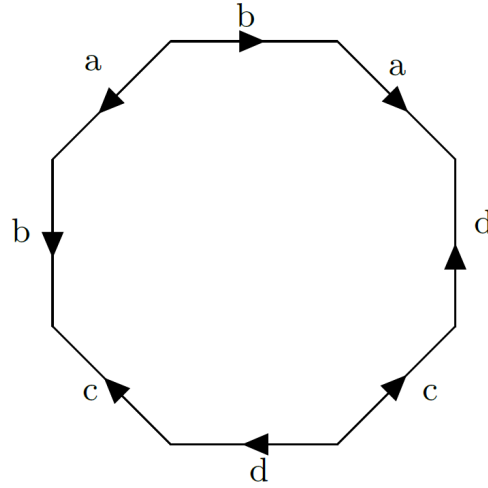


Figura 3.6: Octògon regular amb les arestes identificades.

Observació. Un aparellament d'arestes d'un polígon Π és una relació d'equivalència que defineix un espai d'identificacions S_Π que té per punts:

- (i) Punts interiors de Π .
- (ii) Parelles $\{w, w'\}$ de punts interiors identificats d'arestes pròpies.
- (iii) Cicles $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ de vèrtexs propis de Π .

3.7.4 Exemple. El polígon de l'exemple anterior (Figura 3.6) ens generaria el tor de doble forat fent l'aparellament que s'indica.

3.7.5 Exemple. *La pseudoesfera hiperbòlica.* Definim el polígon hiperbòlic Π que té per arestes $Re(z) = -\pi$, $Re(z) = \pi$ i el tros de $\partial\mathbb{H}^2$ amb $-\pi \leq Re(z) \leq \pi$ i que té per vèrtexs $-\pi$, π i ∞ , tots impropis.

Definirem l'aparellament $\{(Re(z) = -\pi), (Re(z) = \pi)\}$ amb la isometria g tal que $g(-\pi + ic) = \pi + ic$.

L'espai d'identificacions S_Π resultant és localment isomètric al pla hiperbòlic. Serà homeomorf a la pseudoesfera de revolució (exemple 3.0.5) però no isomètric, doncs la de revolució tenia la mètrica induïda de \mathbb{R}^3 , amb la qual no era completa, en canvi S_Π sí que ho és.

3.7.6 Teorema. Un espai d'identificacions $S = S_\Pi$ té una distància que coincideix amb la hiperbòlica per regions de Π prou petites de manera que S_Π serà una superfície hiperbòlica si la suma dels angles del cada cicle de vèrtexs suma 2π .

Demostració. Definim $d_S(A, B)$ com l'ínfim de les longituds de tots els camins poligonals de A a B en S_Π . Tot camí p_{AB} de A a B el podem descompondre en els camins p_{Aw_1} , $p_{w'_1w_2}$, $p_{w'_2w_3}$, ... i p_{w_nB} on

- w_1 = primer punt en el que el camí p_{AB} creua una aresta de Π
- w'_1 = punt (identificat amb w_1) en el que el camí p_{AB} torna a entrar en Π
- \vdots
- w_n = últim punt en el que el camí p_{AB} torna a entrar en Π

Per tant

$$\text{long}_S(p_{AB}) := \text{longitud del camí } p_{AB} = l(p_{Aw_1}) + \dots + l(p_{w_n B})$$

Així tindrem:

$$d_S(A, B) = \inf \{ \text{long}_S(p_{AB}) \mid \text{amb } p_{AB} \text{ camí poligonal de } A \text{ a } B \}$$

que evidentment és distància.

Volem ara veure que per a tot punt $P \in S_\Pi$ existeix un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_\varepsilon(P)$ és isomètrica a un disc de \mathbb{H}^2 . Segons l'observació anterior distingirem els casos:

(i) Si P és un punt u interior de Π , escollim ε menor que un mig de la \mathbb{H}^2 -distància mínima de u a qualsevol aresta de Π . Llavors $B_\varepsilon(P)$ serà precisament el disc $B_\varepsilon(u)$ i per a tota parella $C, D \in B_\varepsilon(P)$ tindrem

$$d_S(C, D) = d_{\mathbb{H}^2}(C, D)$$

doncs el camí més curt entre C i D és el \mathbb{H}^2 -segment CD .

Si el camí creués alguna aresta de Π tindria necessàriament longitud major que 2ε per com hem escollit ε . Per tant, $B_\varepsilon(P)$ és isomètrica a un \mathbb{H}^2 -disc.

(ii) Si P és una parella $\{w, w'\}$ de punts interiors d'arestes identificats, escollim ε menor que un quart de la \mathbb{H}^2 -distància mínima de w o w' a qualsevol aresta o vèrtex de Π . Llavors $B_\varepsilon(P)$ és la unió

$$B_\varepsilon(\{w, w'\}) = (B_\varepsilon(w) \cap \Pi) \cup (B_\varepsilon(w') \cap \Pi)$$

Per $C, D \in B_\varepsilon(P) = B_\varepsilon(\{w, w'\})$ tindrem

$$d_S(C, D) = \begin{cases} d_{\mathbb{H}^2}(C, D) & \text{si } C \text{ i } D \text{ estan en el mateix "mig" disc} \\ d_{\mathbb{H}^2}(C', D) & \text{si } C \in B_\varepsilon(w') \text{ i } D \in B_\varepsilon(w) \\ d_{\mathbb{H}^2}(C, D') & \text{si } C \in B_\varepsilon(w) \text{ i } D \in B_\varepsilon(w') \end{cases}$$

Si el camí sortís de la bola $B_\varepsilon(\{w, w'\})$ i creués alguna aresta de Π que no fos la de w o w' tindria necessàriament longitud major que 2ε per com hem escollit ε . Per tant, $B_\varepsilon(P)$ és isomètrica a un \mathbb{H}^2 -disc.

(iii) Si P és un cicle de vèrtexs $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, escollim ε menor que un quart de la longitud de tota aresta de Π . Llavors $B_\varepsilon(P)$ és la unió

$$B_\varepsilon(\{w_1, w_2, \dots, w_k\}) = (B_\varepsilon(w_1) \cap \Pi) \cup (B_\varepsilon(w_2) \cap \Pi) \cup \dots \cup (B_\varepsilon(w_k) \cap \Pi)$$

de "sectors" $V_\varepsilon(w_i) = B_\varepsilon(w_i) \cap \Pi$.

Quan l'angle d'aquests sectors suma 2π podem descompondre les boles $B_\varepsilon(w_i)$ en sectors isomètrics als $V_\varepsilon(w_i)$, adjacents els uns dels altres en el mateix ordre que se segueix en S_Π al voltant del cicle de vèrtexs. Per tant per $C, D \in B_\varepsilon(P) = B_\varepsilon(\{w_1, w_2, \dots, w_k\})$ tindrem

$$d_S(C, D) = d_{\mathbb{H}^2}(C^{(j)}, D^{(j)})$$

on $C^{(j)}, D^{(j)}$ són els punts en $B_\varepsilon(w_j) \cap \Pi$ corresponents a C, D .

Altre cop, si el camí sortís de la bola $B_\varepsilon(\{w_1, w_2, \dots, w_k\})$ tindria necessàriament longitud major que 2ε per com hem escollit ε . Per tant, $B_\varepsilon(P)$ és isomètrica a un \mathbb{H}^2 -disc. \square

3.8 Construcció de superfícies compactes a partir de polígons

Anem a generalitzar una mica més el concepte de construir una superfície a partir de polígons.

El teorema de Radó, que no demostrarem, diu que tota superfície compacta és homeomorfa a un espai S_{Π} generat a partir d'un polígon Π amb les arestes identificades per parelles. El polígon Π normalment és euclidià, doncs els aparellaments d'arestes no cal que siguin isometries, només homeomorfismes.

L'elecció de la geometria del polígon Π només serà important si ens preguntem si és possible generar geomètricament tota superfície compacta com a superfícies euclidiana, el·líptica i hiperbòlica. Si assumim el teorema de Radó veurem que la resposta és que sí.

Observació. Com que les arestes del polígon Π s'identifiquen per parelles, el polígon tindrà $2n$ arestes amb $n \in \mathbb{N}^+$, notarem el polígon per un n -gon.

Si Π és un 2-gon les dues possibles maneres d'identificar les arestes donen l'esfera i el pla projectiu com a superfícies resultants. Per tant tota superfície S_{Π} definida per un 2-gon serà una superfície el·líptica i, per tant, es pot generar geomètricament.

Si Π és un 4-gon, S_{Π} resultarà ser una esfera, un pla projectiu, un tor o una ampolla de Klein. Per tant S_{Π} també es pot generar geomètricament, doncs tant el tor com l'ampolla de Klein són superfícies euclidianes, com ja hem vist.

La resta de superfícies S_{Π} es podran generar geomètricament com a superfícies hiperbòliques.

3.8.1 Lema. Tota superfície S_{Π} no homeomorfa a l'esfera és homeomorfa a una superfície $S_{\Pi'}$ amb Π' un polígon amb un sol cicle de vèrtexs.

Demostració. Suposem que el polígon Π té com a mínim dos cicles $u = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ i $v = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Serà suficient veure que es pot obtenir un polígon Π' que genera una superfície homeomorfa, que té menys vèrtexs en v i no té nous cicles de vèrtexs.

Per simplificar notació notarem per v tot vèrtex del cicle v i notarem per u tots els del cicle u . Com que no tots els vèrtexs de Π són u , hi haurà una aresta a de Π amb un vèrtex u i un vèrtex que no sigui u , sense pèrdua de generalitat, que sigui v .

Sigui a' l'aresta amb la que s'identifica, si no comparteix el vèrtex v amb a podem fer el procediment que es veu en la Figura 3.7). El resultat és un nou polígon Π amb menys vèrtexs v , sense cicles nous, i tal que $S_{\Pi'}$ és homeomorfa a S_{Π} .

Si a' comparteix el vèrtex v amb a han de tenir direcció d'identificació oposada, si aquest és el cas al identificar les arestes desapareixerà v a no ser que que a i a' siguin les úniques arestes de Π que llavors S_{Π} serà homeomorfa a una esfera o al pla projectiu. \square

3.8.2 Proposició. L'àrea d'un polígon Π amb n arestes és

$$A(\Pi) = (n - 2)\pi - \sum \text{angles interiors} \quad (3.8.1)$$

Demostració. Pel corol·lari 3.6.3 sabem que l'àrea d'un triangle hiperbòlic $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ és $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Com que el polígon Π té n costats el podem triangular en $n - 2$ triangles

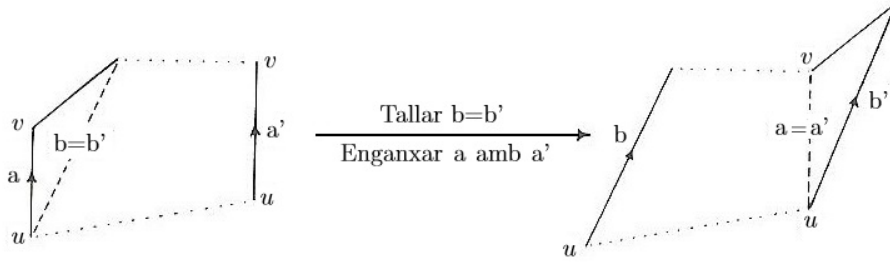


Figura 3.7: Transformació d'un polígon a un altre equivalent.

hiperbòlics

$$A(\Delta_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}) = \pi - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)$$

$$A(\Delta_{\alpha_2\beta_2\gamma_2}) = \pi - (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)$$

...

$$A(\Delta_{\alpha_{n-2}\beta_{n-2}\gamma_{n-2}}) = \pi - (\alpha_{n-2} + \beta_{n-2} + \gamma_{n-2})$$

de manera que

$$A(\Pi) = \sum_{i=1}^{n-2} A(\Delta_{\alpha_i\beta_i\gamma_i}) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n-2} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)$$

Com que tot angle de Π es descompon en tants angles com triangles comparteixen aquell vèrtex resultarà

$$\sum_{i=1}^{n-2} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = \sum \text{angles interiors}$$

□

3.8.3 Teorema. Tota superfície compacta es pot construir geomètricament.

Demostració. Com que les superfícies compactes euclidianes i el·líptiques ja hem vist que es poden generar geomètricament, ens queda comprovar-ho per les hiperbòliques. Per l'observació vista en aquest capítol, podem considerar que el nombre d'arestes que tindrà el polígon Π és $2n \geq 6$. A més, pel lema, podem considerar que Π només té un cicle de vèrtexs.

Pel teorema 3.7.6 S_Π serà hiperbòlica si Π és un polígon tal que

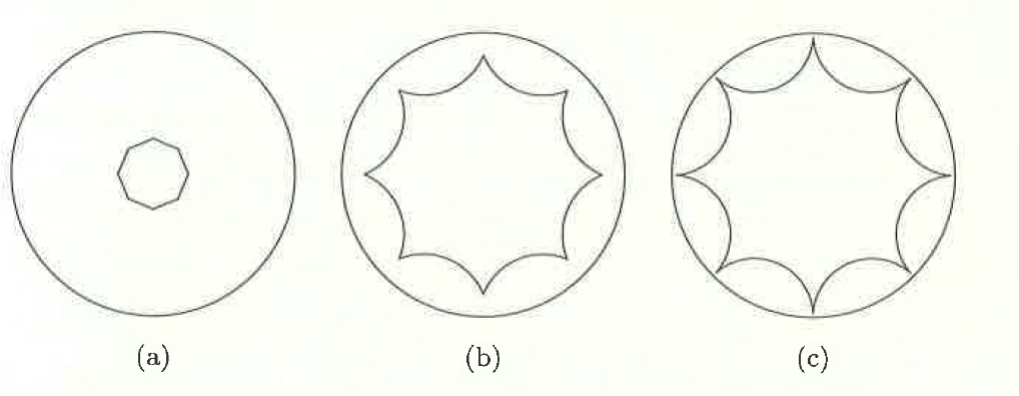
$$\sum \text{angles interiors} = 2\pi$$

Si Π un $2n$ -gon regular, és necessari que

$$(2n-2)\pi - A(\Pi) = 2\pi$$

Si 0 en \mathbb{D}^2 el centre de Π , el polígon pot tenir qualsevol diàmetre positiu (recordem que la distància és la hiperbòlica). L'àrea de Π variarà de forma contínua amb el diàmetre, entre 0 (quan el diàmetre és zero) i $(2n-2)\pi$ (quan els angles siguin zero), veure Figura 3.8.

Per tant, pel teorema del valor mig, com que $2n > 4$ existirà un polígon Π que tindrà àrea de manera que els angles interiors sumin 2π . □

Figura 3.8: Octògons de diferents diàmetres en \mathbb{D}^2 .

3.9 Relació entre polígons i subgrups de moviments

Vist el nou mètode de construcció de superfícies. Ens preguntem si podem trobar una analogia entre la construcció de superfícies hiperbòliques a partir de subgrups de moviments Γ (com ho fèiem amb les superfícies euclidianes i el·líptiques) i la construcció a partir de polígons.

Donat un polígon Π que genera S_π es pot obtenir el subgrup Γ de manera que $S = \mathbb{H}^2/\Gamma = S_\Pi$, doncs ha d'incloure els moviments que identifiquen les arestes del polígon amb l'orientació adient. La inclusió difícil és si donat un subgrup Γ existeix un polígon Π que generi la mateixa superfície. Veiem que això serà possible sempre que la superfície sigui compacta.

3.9.1 Teorema. Per a tota superfície hiperbòlica compacta $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ existeix un polígon Π de manera que $S_\Pi = S$.

Demostració. Donat que \mathbb{H}^2/Γ és una superfície hiperbòlica, per a tot $z \in \mathbb{H}^2$ existeix un entorn obert tal que no conté cap punt de l'òrbita $\Gamma(z)$ tret del propi z .

Per a qualsevol $c \in \mathbb{H}^2$ podem definir la regió de Dirichlet $D(c)$ com

$$D(c) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(z, c) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z, gc) \ \forall g \in \Gamma\}$$

Tota Γ òrbita té un representant en $D(c)$.

Podem definir $D(c)$ com la intersecció dels següents semiplans hiperbòlics tancats:

$$H_g(c) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(z, c) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z, gc)\}$$

Per tant, $D(c)$ consisteix en una regió convexa, tancada i amb vora $\partial D(c)$ formada per segments de les \mathbb{H}^2 -línies

$$L_g(c) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(z, c) = d_{\mathbb{H}^2}(z, gc)\}$$

Hem de veure que $\partial D(c)$ està formada per un nombre finit d'aquestes línies.

Aquí usem que la superfície és compacta, el que implica que $D(c)$ és compacte i que estarà contingut en un disc hiperbòlic de centre c i d'un cert radi ρ . De la definició de $L_g(c)$ es

dedueix que per a tota \mathbb{H}^2 -línia $L_g(c)$ que passi a distància menor que ρ de c existeix un punt gc de $\Gamma(c)$ a distància menor que 2ρ de c .

Per tant, si hi ha infinites $L_g(c)$ que passen a menys de ρ de c , hi haurà infinits punts gc a distància menor que 2ρ de c , el que implicaria que hi ha un punt d'acumulació, cosa que contradiu la suposició del fet que \mathbb{H}^2/Γ és una superfície.

Agafant $\Pi = D(c)$ per algun punt $c \in \mathbb{H}^2$ ja hem acabat. □

Conclusions

Acabat el treball, les conclusions que n'extrec són senzilles. Tot i ser un treball enfocat en l'estudi de la geometria de la forma més elemental, han calgut eines de camps tan diversos com poden ser la teoria de grups, l'àlgebra complexa, càlcul integral o la geometria diferencial.

L'estudi de les superfícies sempre ha estat una part important de la geometria, inclús per a l'estudi de l'espai, on la geometria pateix deformacions, ha estat necessari.

En aquest treball ens hem centrat en una forma més abstracta de generar les superfícies que com es defineixen normalment (que és amb parametritzacions) a partir dels espais quocients, doncs la geometria que se'n deriva és molt més senzilla d'estudiar i, per tant, de classificar. La conclusió més immediata sobre aquesta forma de generar les superfícies és que només podem aconseguir-ho per superfícies "prou bones" que compleixin certs requisits (completes i connexes).

Tot i que això no ha estat objecte d'estudi en el treball i per tant no s'ha demostrat, les úniques geometries en les quals podem classificar les superfícies són l'euclidiana, l'el·líptica i la hiperbòlica. Així, una conclusió important és que en l'estudi local de les superfícies només caldrà que ens reduïm a tres casos, quan aquestes siguin completes tindrem el quadre següent:

Superfície	Compacta	No Compacta
Euclidiana	Tor i Ampolla de Klein	\mathbb{R}^2 , Cilindre i Cinta de Möbius
El·líptica	\mathbb{S}^2 i \mathbb{P}^2	—
Hiperbòlica	Superfícies de gènere ≥ 2	\mathbb{H}^2 i les restants de la forma \mathbb{H}^2/Γ

Una forma senzilla de veure en quina geometria ens haurem de centrar per estudiar una superfície és calculant-ne l'àrea dels seus triangles o, com s'ha vist en el treball, si la suma dels seus tres angles interiors és major, igual o menor a π .

Bibliografia

- [1] JONES, G. i SINGERMAN, D., *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.
- [2] LEE, J.M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, 1997.
- [3] NAVARRO, V. i PASCUAL, P., *Topologia Algebraica*, Col·lecció UB 34, 1999.
- [4] NIKULIN, V.V. i SHAFAREVICH, I.R., *Geometries and Groups*, Springer-Verlag, 1987.
- [5] STILLWELL, J., *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [6] THURSTON, W., *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, 1997.
- [7] XAMBO, S., *Geometria*, EDICIONES UPC, 1997.